

## Über Verhältnisse

Neben ihrer Tätigkeit als Genie betätigen sich diese Genies nicht selten mit der Konstruktion von Kriegsgerät.



Gemälde von Domenico Fetti 1620 (Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Archimedes>)

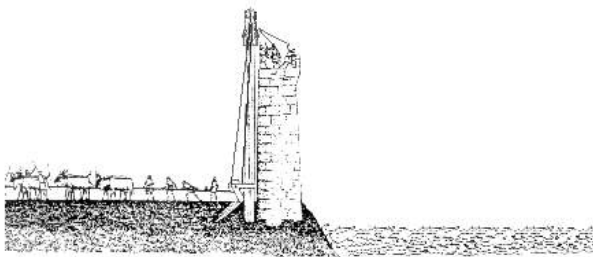
So zum Beispiel auch Archimedes: er soll zur Verteidigung von Syrakus gegen die angreifende römische Flotte die „Kralle des Archimedes“ erfunden haben. Dabei handelte sich um eine Art Kran, der in die Stadtmauer eingelassen war.



Wandgemälde von Giulio Parigi 1599 (Quelle: [https://de.wikipedia.org/wiki/Archimedes#/media/File:Parigi\\_griffe.jpg](https://de.wikipedia.org/wiki/Archimedes#/media/File:Parigi_griffe.jpg))

Näherten sich römische Galeeren den Mauern von Syrakus, um sie mit Brandsätzen zu beschießen, schwenkten die Verteidiger die langen Arme der „Kralle“ aus. An ihnen hingen an langen Ketten spitze Haken, die sie in den Bug der Schiffe zu rammen versuchten.

Saß einer dieser Haken fest, lösten die Syrakuser ein gesichertes, schweres Gegengewicht auf der anderen Seite des Krans – und durch raffinierte Hebelwirkung wurden selbst große Schiffe aus dem Wasser gehoben. Und dann kappten die Verteidiger die Ketten, und die Galeere krachte zurück ins Meer – oft auch auf die tückischen Felsen vor den Mauern. Oder sie kenterte.



*(Auf die Zeichnung klicken.*

*Quelle: <https://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Claw/illustrations.html>)*

Kraft ist bekanntlich kein Zauberwerk, sondern eine Frage des Hebels. Genauer: der Länge des Hebels. Wer viel Kraft braucht, muss eben die Verhältnisse der Hebelarme passend einrichten.

Es gibt aber auch andere Verhältnisse, etwa gefährliche: Les Liaisons dangereuses ist ein Briefroman von Choderlos de Laclos, der als ein Hauptwerk der französischen Literatur des 18. Jahrhunderts gilt – ein Sittengemälde des ausgehenden Ancien régime und ein Klassiker der Weltliteratur. Er erschien in Frankreich erstmals 1782, bereits 1 Jahr später war er auf Deutsch verfügbar.



*Illustration in einer Ausgabe von 1796 (Quelle: [https://de.wikipedia.org/wiki/Gefährliche\\_Liebschaften](https://de.wikipedia.org/wiki/Gefährliche_Liebschaften))*

Oder es gibt Verhältnisse, die nicht so sind wie sie sein sollten – etwa im Ersten Dreigroschenfinale (Über die Unsicherheit menschlicher Verhältnisse) singt PEACHUM (mit der Bibel in den Händen):

„Das Recht des Menschen ist's auf dieser Erden,  
da er doch nur kurz lebt, glücklich zu sein,  
teilhaftig aller Lust der Welt zu werden,  
zum Essen Brot zu kriegen und nicht einen Stein.  
Das ist des Menschen nacktes Recht auf Erden,  
doch leider hat man bisher nie vernommen,  
dass etwas recht war und dann war's auch so!  
Wer hätte nicht gern einmal Recht bekommen?  
Doch die Verhältnisse, sie sind nicht so.“

Das allerdings führt ziemlich nahe an die Grenzen der von zwanglosen Vorträgen bewohnbaren Welt, nämlich in Richtung Politik.

Deshalb möchte ich mich heute mit einem anderen Verhältnis beschäftigen, nämlich dem Goldenen Schnitt.

# Der Goldene Schnitt – Mathematik und Mythos

Der goldene Schnitt bezeichnet ein bestimmtes Verhältnis, in dem man Strecken teilen kann. Über dieses Verhältnis wird seit 2 1/2 Tausend Jahren lebhaft und leidenschaftlich diskutiert - lebhaft unter den Mathematikern, leidenschaftlich unter Anwendern wie Bildenden Künstlern, Architekten, Musikern und deren Metaphysikern.

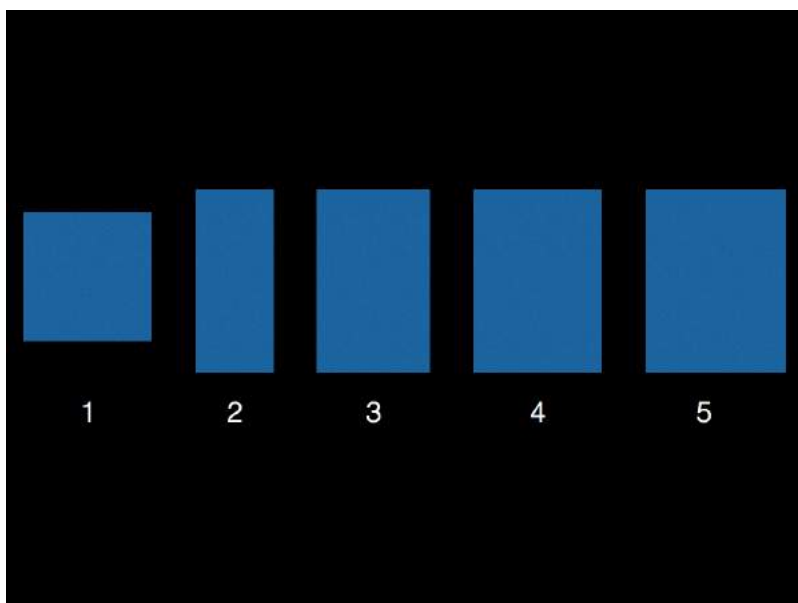
Luca Pacioli begrüßt im Jahr 1509 die Leser seines Buches „De Divina Proportione“ so:

„Ein für alle klaren und wissbegierigen Geister  
nothwendiges Werk;  
wo jeder Studirende  
der Philosophie, Perspective, Malerei, Sculptur, Architektur, Musik  
und anderer mathematischer Fächer  
eine angenehme subtile und bewundernswerthe  
Gelehrsamkeit antreffen  
und sich mit verschiedenen Fragen der heiligsten Wissenschaft  
erfreuen wird.“

Was ist schön? Das ist eine Frage, die ebenso universal ist wie von jedem Zeitalter, jeder Generation neu zu beantworten.

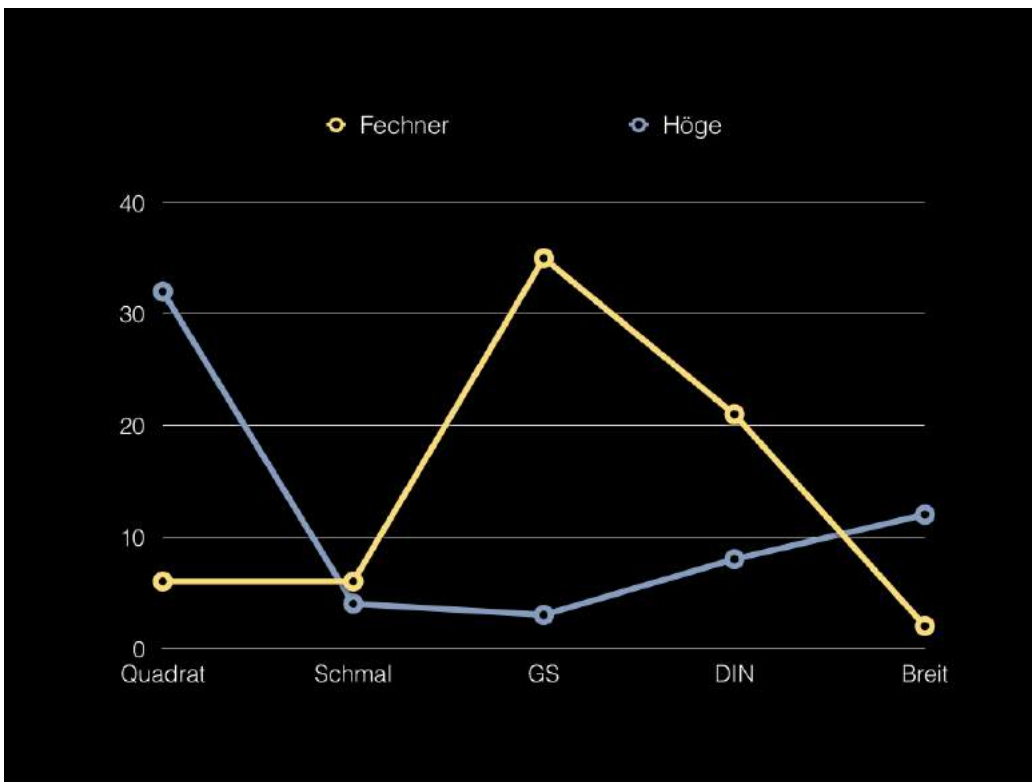
Zur Einstimmung möchte ich gerne mit Ihrer Hilfe in einem Experiment klären, wie zwanglos der goldene Schnitt ist.

Hier ist eine Folge von 5 unterschiedlichen Rechtecken; bitte suchen Sie sich dasjenige heraus, dessen Proportionen Ihnen am besten gefallen. Ich werde dann Ihre Favoriten der Reihe nach abfragen und daraus eine Mengenverteilung herstellen.



*Fechner-Experiment*

Nun, dieses Experiment hat vor rund 140 Jahren der Experimentalpsychologe Gustav Theodor Fechner erfunden. Er wollte die in dieser Zeit heftig diskutierte Annahme überprüfen, dass wohlgefällige Gegenstände die Proportionen des Goldenen Schnitts aufweisen. Dazu hat er als bottom-up-Analyse in mehreren Jahren über 400 Personen 10 verschiedene Rechtecke gezeigt und sie nach demjenigen gefragt, das sie für das wohlgefälligste hielten. Sein Ergebnis zeigt einen deutlichen Schwerpunkt bei dem Rechteck, das die Proportionen des goldenen Schnitts hat.



Damit wäre also eine Art Universalgesetz der Ästhetik bestätigt. Aber so einfach ist es nicht. Eine Wiederholung des Experiments 120 Jahre später hat Prof. Höge auf ganz andere Ergebnisse gebracht: nach Ansicht seiner Probanden war das Quadrat mit Abstand das „Rechteck“ mit den gefälligsten Proportionen.

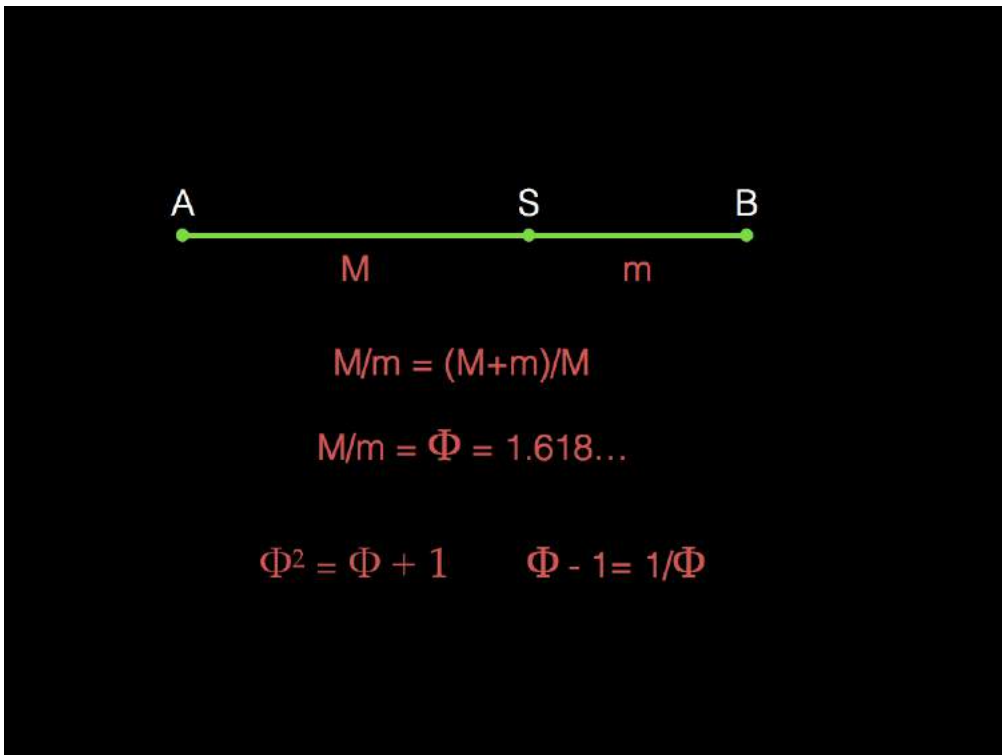
Also - sehen wir uns den goldenen Schnitt etwas näher an.

# A. Der Goldene Schnitt und die Mathematik

Für Mathematiker hat der goldene Schnitt seit 2500 Jahren einen gewissen mathematischen Sex-Appeal, weil er mit ganz besonderen mathematischen Eigenschaften glänzt. Euklid hat den goldenen Schnitt erstmals mathematisch beschrieben. Seither spielt er bis hin zur Konstruktion von Fraktalen eine wichtige Rolle in der Mathematik.

## 1. Der Goldene Schnitt

Eine Strecke wird durch einen Punkt S im goldenen Schnitt geteilt, wenn das Verhältnis der Gesamtstrecke zum längeren Teil das selbe ist wie das Verhältnis des längeren Teils zum kürzeren. Dieses Teilungsverhältnis bezeichnet man mit dem griechischen Buchstaben  $\Phi$ .  $\Phi$  ist Lösung der Gleichung  $(M+m)/M = M/m = \Phi$ . (M heißt der Major, m der Minor). Das kann man in eine quadratische Gleichung umformen:  $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$ , deren Lösung  $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$  ist.



### *Der goldene Schnitt*

Die Konstante  $\Phi$  ist eine irrationale Zahl wie  $\pi$ , der Betrag von  $\Phi \approx 1,618$ . Wenn man sich die Mühe macht, die ersten 999 Dezimalstellen von  $\Phi$  aufzuzeichnen, kommt folgendes heraus:

### EINE LÄNGERE VARIANTE VON $\Phi$

Für Perfektionisten hier die Goldene Zahl auf 999 Dezimalstellen genau!

```
1,61803398874989484820458683436563811772030917980576286213544862270526
046281890244970720720418939113748475408807538689175212663386222353693
179318006076672635443338908659593958290563832266131992829026788067520
876689250171169620703222104321626954862629631361443814975870122034080
588795445474924618569536486444924104432077134494704956584678850987433
944221254487706647809158846074998871240076521705751797883416625624940
758906970400028121042762177111777805315317141011704666599146697987317
613560067087480710131795236894275219484353056783002287856997829778347
845878228911097625003026961561700250464338243776486102838312683303724
292675263116533924731671112115881863851331620384005222165791286675294
654906811317159934323597349498509040947621322298101726107059611645629
90981629055520852479035240602017279974717534277592778625619432082750
513121815628551222480939471234145170223735805772786160086883829523045
926478780178899219902707769038953219681986151437803149974110692608867
429622675756052317277520353613936
```

$\Phi$  (Quelle: Corbalán, Seite 25)

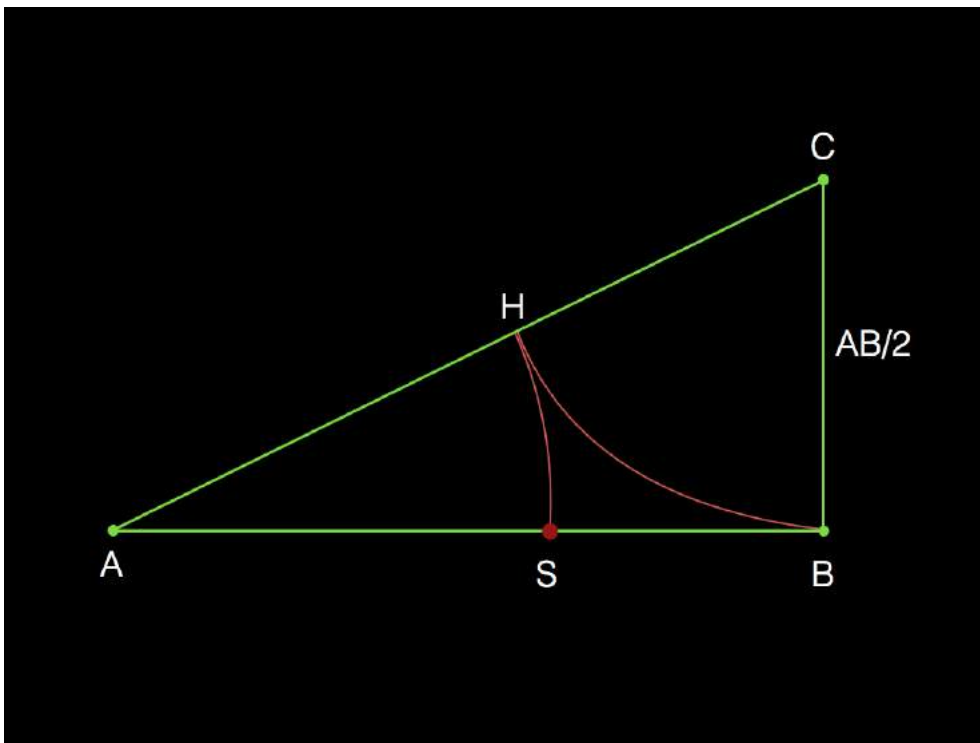
$\Phi$  heißt goldene Zahl und hat überraschende mathematische Eigenschaften:

$$\Phi + 1 = \Phi^2$$

$$\Phi - 1 = 1/\Phi$$

was es zu einer beliebten Spielweise für Mathematiker macht.

Die vielleicht einfachste Konstruktion des goldenen Schnitts mit Zirkel und Lineal ist die folgende: man errichtet am Ende der zu teilenden Strecke AB die Senkrechte mit der halben Länge. Der Kreis um C mit dem Radius AB/2 schneidet die Hypotenuse in H, der Kreis um A mit dem Radius AH schneidet die Strecke in S; dieser Punkt teilt die Strecke im goldenen Schnitt.



Konstruktion des goldenen Schnitts

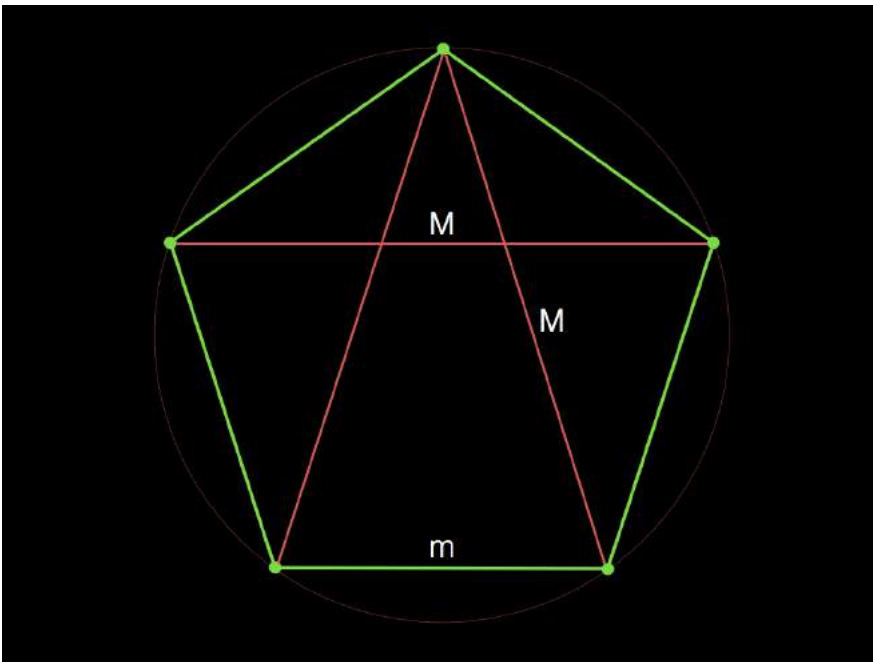
## 2. Pentagon, Pentagramm und Dodekaeder

Die (zweidimensionale) geometrische Figur, in der der goldene Schnitt geradezu inflationär auftritt, ist das reguläre Fünfeck (Pentagon). Am Fünfeck entdeckten die Pythagoräer den goldenen Schnitt 200 Jahre vor Euklids Definition.

Beim regulären Fünfeck sind die Seiten gleich lang und die Winkel gleich groß.

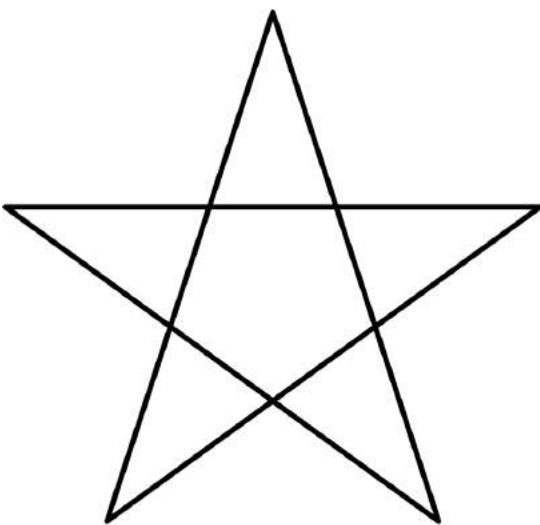
Es gilt:

- die Länge der Diagonale verhält sich zur Seitenlänge im goldenen Schnitt
- zwei Diagonalen bilden mit einer Seite ein goldenes Dreieck
- zwei Diagonalen, die keine Ecke gemeinsam haben, treffen sich in einem Punkt, der sie im goldenen Schnitt teilt.



*Reguläres Fünfeck (Pentagon)*

Wenn man die Seiten eines regulären Fünfecks verlängert, bis sie sich schneiden, so entsteht ein Pentagramm (Sternfünfeck).



*Pentagramm*



Das Pentagramm spielte im Mittelalter in den magischen Wissenschaften eine große Rolle und wurde z.B. als „Drudenfuß“ zum Schutz vor Hexen und bösen Geistern benutzt.

Mephisto kann in Goethes Faust das Studierzimmer nicht verlassen, denn

*Gesteh ich's nur! Dass ich hinausspaziere*

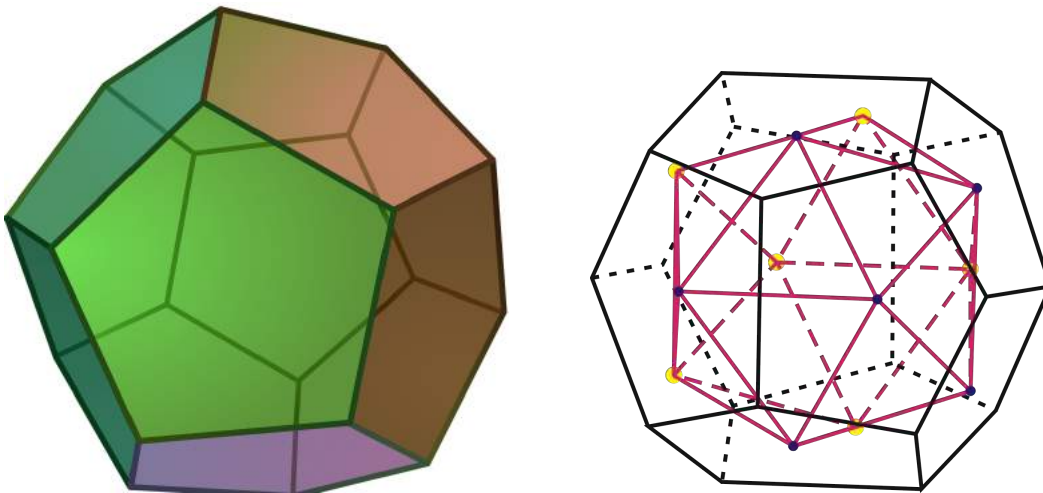
*Verbietet mir ein kleines Hindernis,*

*Der Drudenfuß auf Eurer Schwelle -*

worauf Faust erstaunt antwortet

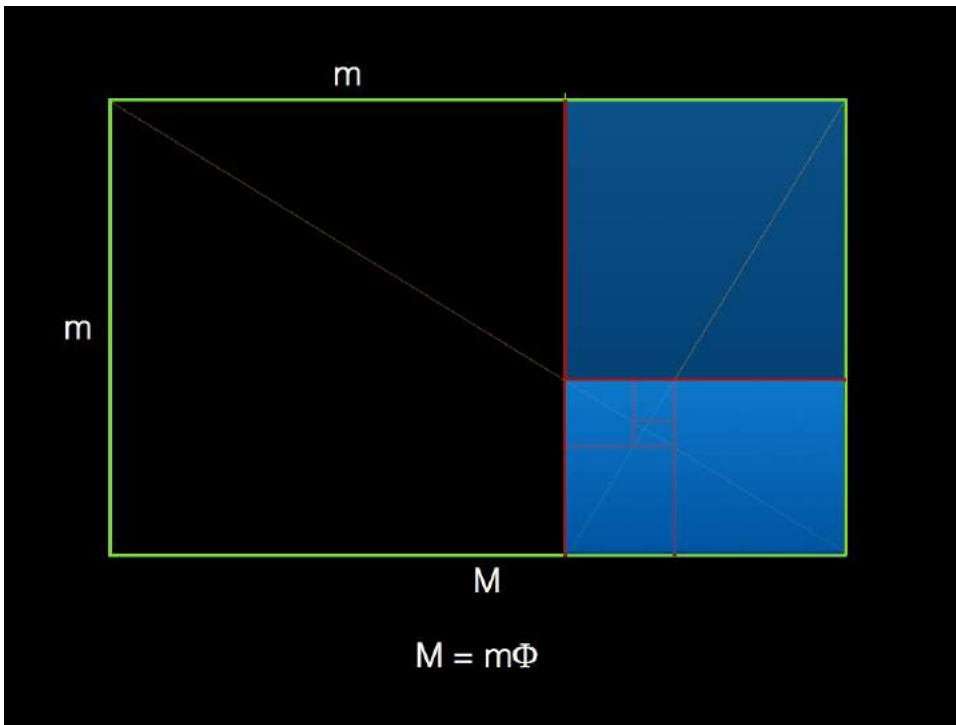
*Das Pentagramma macht Dir Pein?*

Einer der 5 platonischen Körper, das Dodekaeder, besteht aus 12 regulären Fünfecken (und beherbergt im Inneren weitere goldene Proportionen).



*Dodekaeder (Quelle: [https://de.wikipedia.org/wiki/Platonischer\\_Körper](https://de.wikipedia.org/wiki/Platonischer_Körper))*

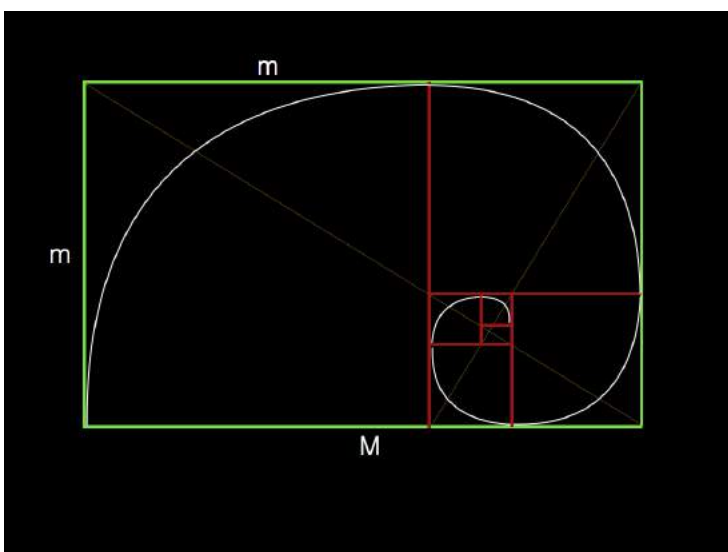
### 3. Das goldene Rechteck und die goldene Spirale



*Goldenes Rechteck*

Das goldene Rechteck wird, wie anfangs schon experimentell erforscht, von vielen als das ‚schönste‘ Rechteck gehalten. Ein Rechteck heißt golden, wenn die längere Seite zur kürzeren im goldenen Schnitt steht, also  $M = m\Phi$ . Wenn man von einem goldenen Rechteck ein Quadrat abspaltet, bleibt wieder ein goldenes Rechteck übrig. Das kann man beliebig oft wiederholen. Ebenso ergibt sich ein goldenes Rechteck, wenn man an ein goldenes Rechteck ein Quadrat an der längeren Seite anfügt.

Wenn man in die Quadrate Viertelkreise mit dem Radius der Seitenlänge des Quadrats zeichnet, erhält man eine gute Näherung an die goldene Spirale.



*Goldene Spirale*

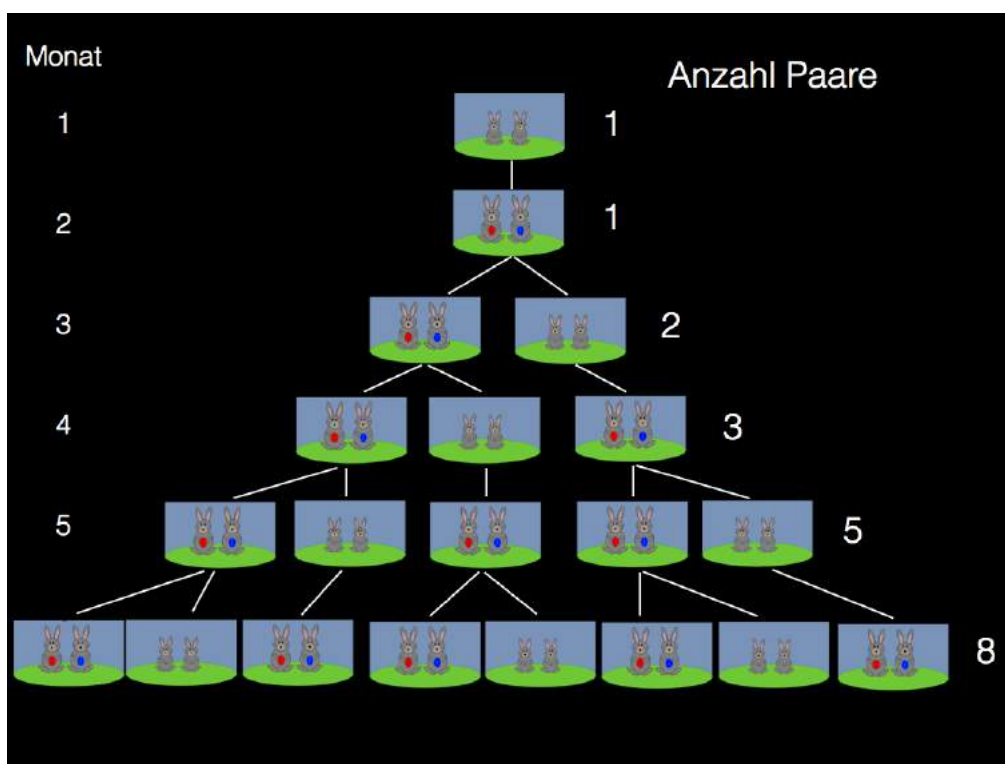
## 4. Fibonacci-Folgen

Der wohl berühmteste Mathematiker des Mittelalters war Leonardo Pisano (ca. 1170 - 1250), genannt Fibonacci (*figlio di Bonacci*).

Fibonacci lernte auf Handelsreisen nach Nordafrika von muslimischen Gelehrten die neuesten mathematischen Errungenschaften kennen und machte sich mit dem aus Asien stammenden indoarabischen Zahlensystem vertraut.

Im Jahr 1202 erschien sein Buch *Liber Abaci*, dessen Hauptanliegen es war, die Überlegenheit des arabischen Zahlensystem gegenüber dem römischen zu demonstrieren – es dauerte aber noch über 200 Jahre, bis sich diese Erkenntnis durchsetzen konnte. Berühmt wurde das Buch aber hauptsächlich durch folgende scheinbar unscheinbare Aufgabe:

„Wie viele Kaninchenpaare können innerhalb eines Jahres aus einem einzigen Paar entstehen, wenn jedes Paar ab dem zweiten Lebensmonat jeden Monat ein weiteres Paar hervorbringt“.



Kaninchenpaare (Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Fibonacci-Folge>)

Die Lösung dieser Aufgabe ergibt ein erstaunliches Muster in der Zahlenfolge: jede Zahl entspricht der Summe der beiden vorangehenden.

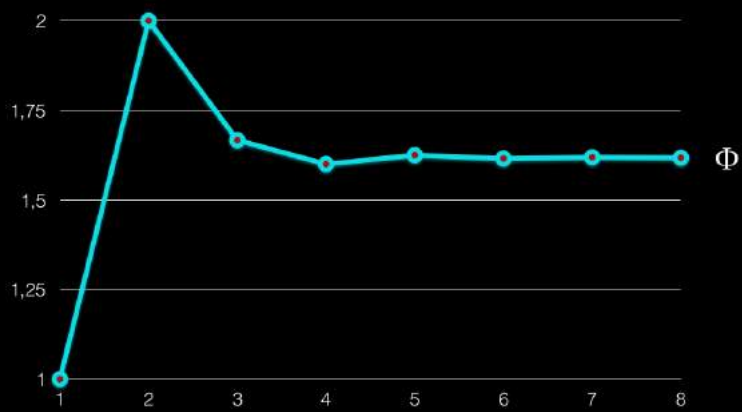
Und Fibonacci fand heraus, dass eine Reihe von Brüchen, die aus dieser Folge natürlicher Zahlen hervorgeht, mit dem Goldenen Schnitt in Verbindung steht. Diese Verbindung zwischen Arithmetik und Geometrie, die er entdeckte, lautet

Die Folge der Quotienten  $f_{n+1}/f_n$  hat den Grenzwert  $\Phi$ ,

also genau das Verhältnis  $\Phi$  der Teilstrecken eines goldenen Schnitts.

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144  
 $f_1$   $f_2$   $f_3$  ...  $f_n$

$$f_n / f_{n-1} \rightarrow \Phi$$



*$\Phi$  als Grenzwert von Fibonacci-Quotienten*

## 5. Fraktale und der goldene Schnitt

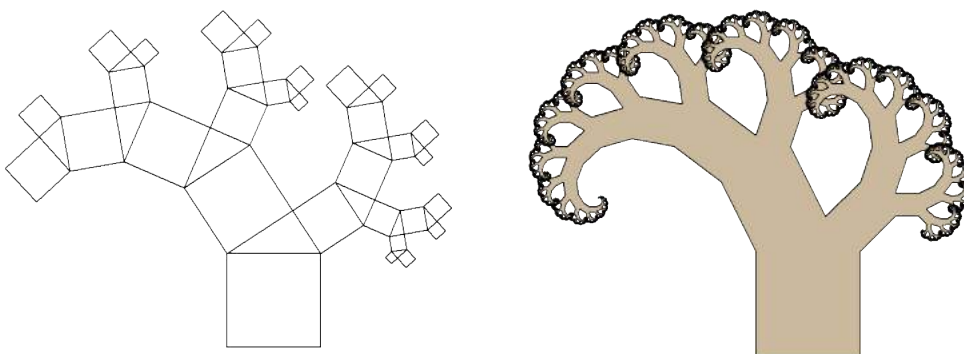
Charakteristisch für den goldenen Schnitt sind Wiederholungen von ähnlichen Elementen. Man kann die goldene Zahl  $\Phi$  aufgrund der Beziehung  $\Phi^2 = 1 + \Phi$  als unendliche Kettenwurzel darstellen:

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

Oder, aufgrund der Beziehung  $\Phi = 1 + 1/\Phi$ , als Kettenbruch, der ebenfalls nur aus Einsen besteht:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{\dots}{1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{\Phi}}}}}}}$$

Fraktale sind (im speziellen Fall) Objekte, die aus mehreren verkleinerten Kopien seiner selbst bestehen. Ein Beispiel ist der Pythagoras-Baum, ein Fraktal, das durch rekursives Aufrufen einer Konstruktionsvorschrift erzeugt wird. Auch hier baut sich, wie bei der goldenen Spirale, das Objekt durch die wiederholte Anwendung einer Konstruktionsvorschrift auf.



*Pythagoras-Baum (Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Fraktal>)*

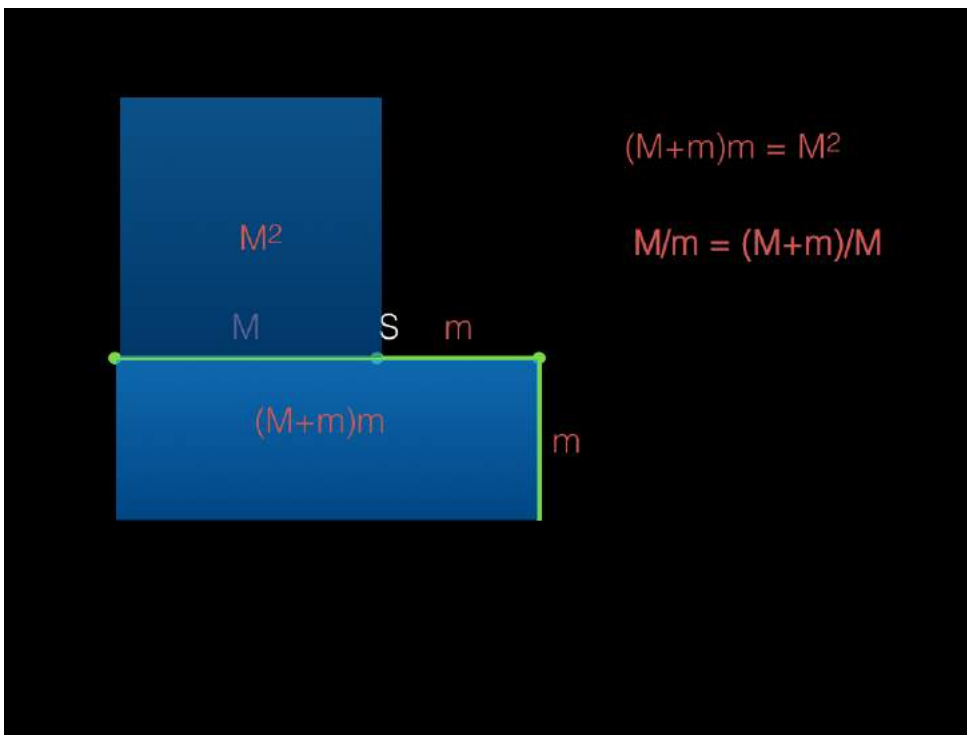
Mit bestimmten Fraktalen kann man das Wachstumsmuster von Bäumen erstaunlich genau nachahmen, und es zeigt sich, dass die Verwendung der goldenen Zahl  $\Phi$  im Verkleinerungsfaktor aufeinanderfolgender Schritte zur bestmöglichen Annäherung führt.

## 6. Zur Geschichte

Der Goldene Schnitt hat seinen Namen im 19. Jhd. erhalten, nachdem er als mathematisches Phänomen seit ca. 2 1/2 tausend Jahren bekannt war.

Ob die Ägypter die Cheopsyramide vor 6000 Jahren nach den Regeln des Goldenen Schnitt konstruiert haben, ist umstritten; jedenfalls ist es eher unwahrscheinlich, weil die damalige ägyptische Mathematik nicht sehr weit entwickelt war, und es gibt auch keinen Beleg dafür, dass den Ägyptern der Goldene Schnitt bekannt gewesen wäre. (Vgl. auch Korff, Der Klang der Pyramiden).

Die Ptolemäer kannten im 5. Jhd. den goldenen Schnitt. Das älteste mathematische Werk, in dem der Goldene Schnitt konstruiert wird, sind die „Elemente“ des griechischen Mathematikers Euklid (365 - 300 v.Chr.). Man sagt, dass die „Elemente“ nach der Bibel und den Schriften Lenins das am häufigsten publizierte und übersetzte Werk sind. Dort findet sich die Aufgabe „Eine gegebene Strecke so zu teilen, dass das Rechteck aus der ganzen Strecke und dem einen Abschnitt gleich dem Quadrat über dem anderen Abschnitt ist.“



*Euklids Konstruktion des Goldenen Schnitts*

Die Lösung dieser Aufgabe bedeutet nichts anderes als die Konstruktion des Goldenen Schnitts.

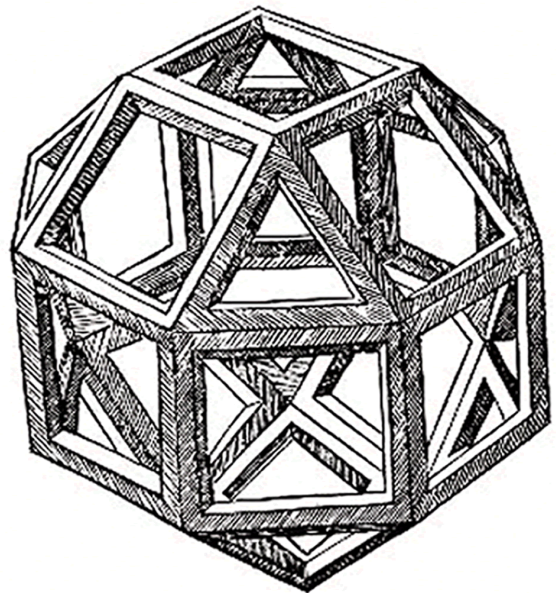
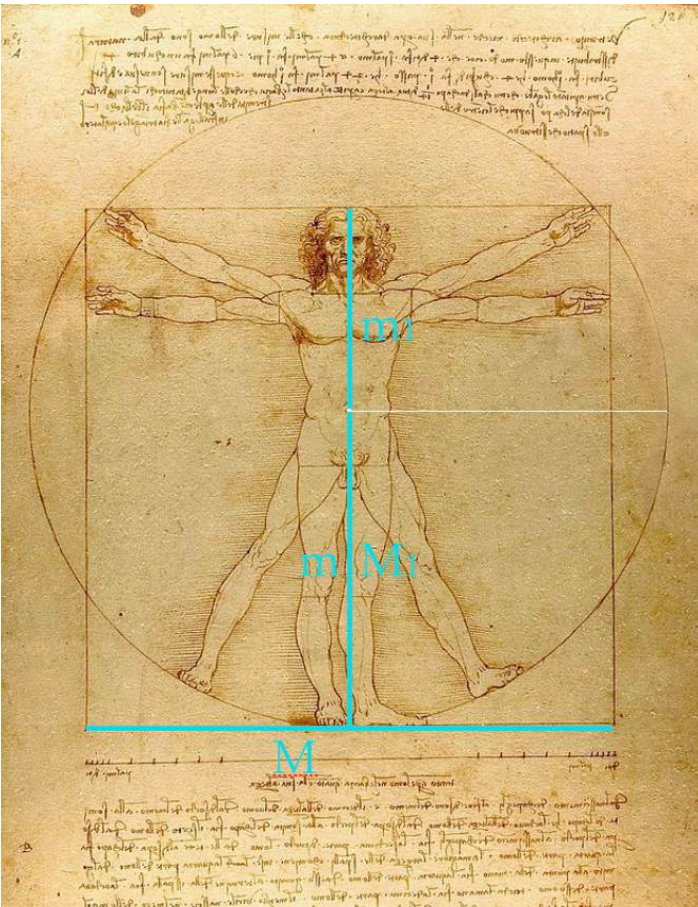
Dann hört man eigentlich erst knapp 2000 Jahre später wieder in der Renaissance vom goldenen Schnitt.

Luca de Pacioli (1445 - 1517) und Leonardo da Vinci (1452 - 1519) brachten den goldenen Schnitt in Zusammenhang mit den Schönheitsvorstellungen der Kunst.



Luca Pacioli (Quelle: [https://de.wikipedia.org/wiki/Luca\\_Pacioli](https://de.wikipedia.org/wiki/Luca_Pacioli), Portrait von Jacopo de' Barbieri)

Pacioli tat dies in seinem Werk *De Divina Proportione* (Über die göttliche Proportion), das 1509 in Venedig veröffentlicht wurde. In ihm legt er die Proportionen fest, die notwendig sind, um Schönheit mit Hilfe der Geometrie herzustellen. Leonardo hat für dieses Werk die berühmten Zeichnungen von Polyedern sowie des Vitruvianischen Menschen geschaffen.



Leonardo-Zeichnungen (Quelle: [https://de.wikipedia.org/wiki/Leonardo\\_da\\_Vinci](https://de.wikipedia.org/wiki/Leonardo_da_Vinci))

*(Vitruv lebte im 1. Jhd. vor Chr. in Rom. Als Ingenieur baute er Kriegsmaschinen für Cäsar, war Architekt und Autor. Er kam in der Renaissance wieder in Mode, als ab 1486 Übersetzungen seiner Werke erschienen, in denen Vitruv auch die Proportionen des menschlichen Körpers als Vorlage für Architektur darstellt.)*

Leonardos vitruvianischer Mensch steht im Einklang mit Vitruvs Empfehlungen; das Verhältnis von Quadratseite und Kreisradius entspricht dem goldenen Schnitt.

Auch Raffael und insbesondere Dürer (1471 - 1528), der „mathematischste Kopf“ unter den Künstlern seiner Zeit, beschäftigten sich intensiv mit der Frage der idealen Proportionen und der Definition der Schönheit.

Die zweite Hälfte des 19. Jhd. begründete den modernen Mythos des Goldenen Schnitts. Schon seinen Namen verdankt er dieser Zeit: der Mathematiker Martin Ohm übertrug in seinem Lehrbuch das Gold-Attribut der *regula aurea* (Dreisatz) fälschlicherweise auf die als *sectio divina* bekannte Teilung, und der neue Begriff *sectio aurea* wurde schnell Allgemeingut (*engl.: golden section; franz.: nombre d'or*).

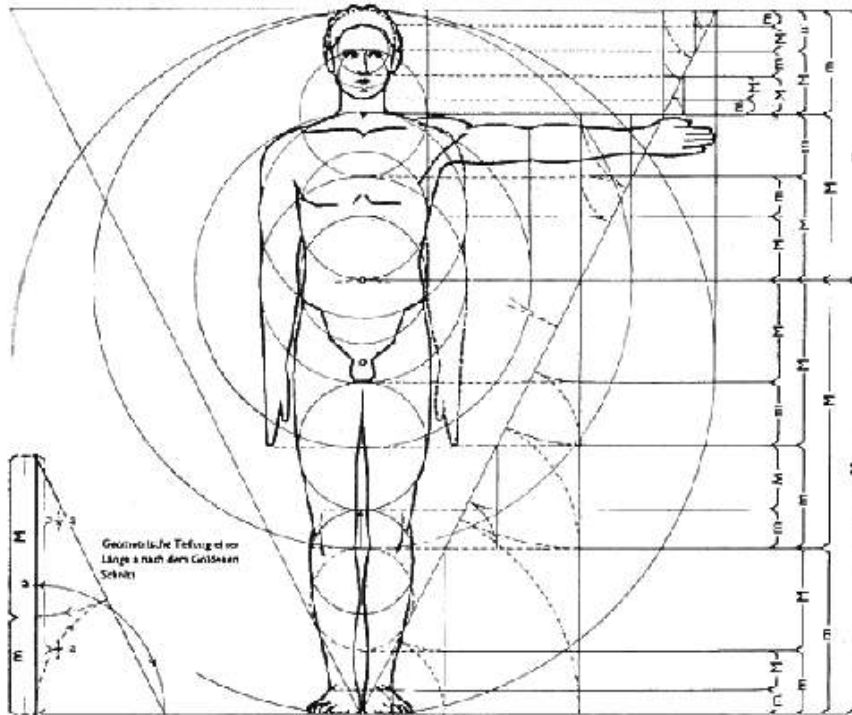
Der goldene Schnitt sei ein göttliches, universelles Naturgesetz der Ästhetik, sagten viele Autoren. Besonders leidenschaftlich verfocht Adolf Zeising (1810 - 1876) - *ein Zwangloser seit 1855* - diese Lehre und war überzeugt, dass im goldenen Schnitt „*überhaupt das Grundprinzip aller nach Schönheit und Totalität drängenden Gestaltung im Reich der Natur wie im Gebiet der Kunst enthalten ist und dass es von Uranfang an allen Formbildungen und formellen Verhältnissen, den kosmischen wie den individualisierenden, den organischen wie den anorganischen, den akustischen wie den optischen, als höchstes Ziel und Ideal vorgeschwebt, jedoch erst in der Menschengestalt seine vollkommenste Realisation erfahren hat*“ (aus seiner Schrift „*Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers*“, 1854).



*Adolf Zeising (Alter Südfriedhof in München. Quelle: [https://de.wikipedia.org/wiki/Adolf\\_Zeising](https://de.wikipedia.org/wiki/Adolf_Zeising))*

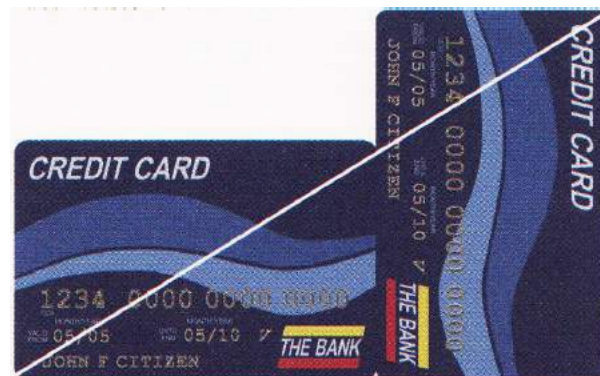


Angeregt von Zeising entstehen Sammlungen über „goldene“ Maßverhältnisse am menschlichen Körper, später z.B. in Neuferts erstmals 1936 erschienenem und seither in 18 Sprachen übersetztem Standardwerk „Bauentwurfslehre“, aus der die folgende Abbildung stammt, die etwa 16 goldene Schnitte aufzeigt, die man dem Menschen anlegen kann:



*Goldene Schnitte beim Menschen (Quelle: Neufert)*

Auch in der digitalen Welt von heute spielt der goldene Schnitt seine Rolle, z.B. bei der Gestaltung von Webseiten, aber auch bei Produkten wie dem iPod, Zigaretenschachteln oder Kreditkarten.



*iPod (Quelle: wikipedia.org/wiki/IPod) Kreditkarte (Quelle: Corbalán, Seite 10)*

## B. Der goldene Schnitt und das Leben

Ob Werke der Natur oder des Menschen vorsätzlich oder zufällig nach den Gesetzen des goldenen Schnitts entstehen, wird teilweise mit großer Leidenschaft diskutiert.

Zeising oder auch in neuerer Zeit Doczi sind echte Fanatiker des goldenen Schnitts.

Dagegen verfolgt z.B. der kanadische Mathematiker Roger Fischler gnadenlos alle Behauptungen über das Auftreten des goldenen Schnitts ausserhalb der Mathematik und versucht, sie zu widerlegen.

Eine quellenmäßig belegte Anwendung des goldenen Schnitts im künstlerischen Prozess lässt sich erst im 20. Jhd. bei Le Corbusier feststellen. Deshalb wurde die bewusste Anwendung des goldenen Schnitts vor dem Ende des 19. Jhd. in

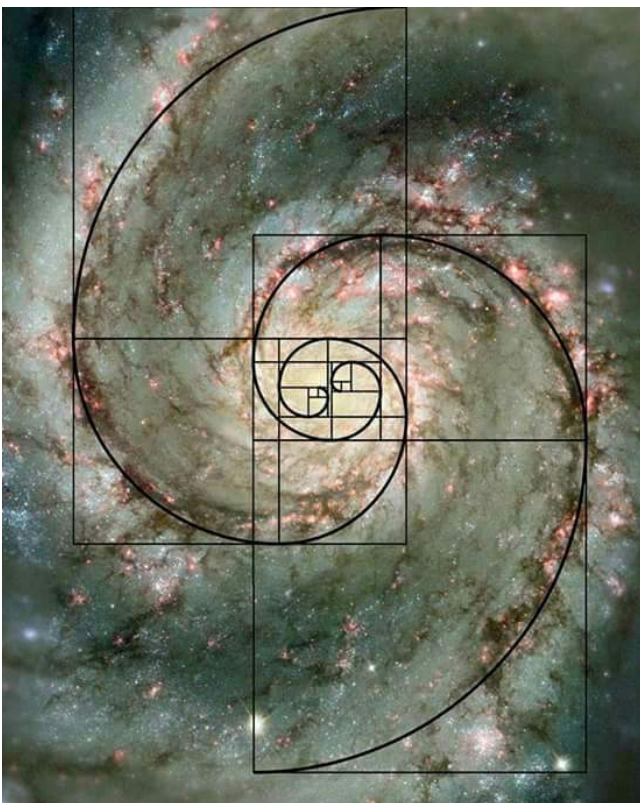
jüngerer Zeit grundsätzlich bezweifelt und als eine *idée fixe* von strukturversessenen Kunsthistorikern angesehen. Allerdings – in vielen bedeutenden Kunstwerken findet sich der goldene Schnitt; z.B. benutzt Caspar David Friedrich den goldenen Schnitt in manchen Werken millimetergenau.

Selbst wenn manche Experten goldene Schnitte an Stellen sehen, wo ein ungetrübtes Auge nichts zu entdecken vermag, etwa mit der Erkenntnis, dass beim Menschen die Brauen die Strecke zwischen Haaransatz und Kinn grundsätzlich im goldenen Schnitt teilen.

Das alles gibt den Rahmen, in dem sich die folgenden Überlegungen bewegen.

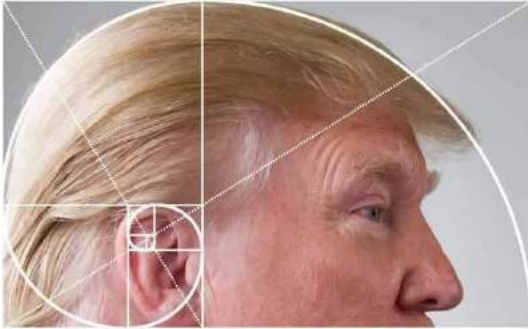
Hier zur Einstimmung noch ein paar Beispiele:

Mit Hilfe des goldenen Schnitts kann man Ordnung ins Weltall bringen:



(Quelle: <https://www.pinterest.de/pin/456904324680450070/>)

oder auch Fibonacci im Grab in heftige Rotationen versetzen:



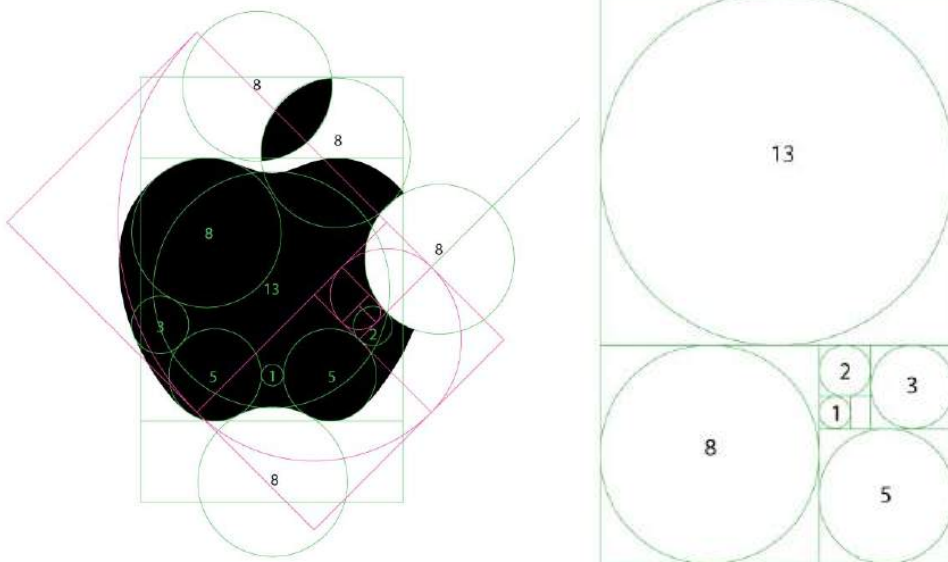
(Quelle: <http://www.tyrosize-blog.de/2016/12/05/warum-donald-trump-am-ende-doch-perfekt-aussieht/>)

Die Vermessung der Schönheit findet heutzutage in unserer Welt 4.0 natürlich digitalisiert statt: kürzlich war in der Zeitung zu lesen, dass George Clooney, bereits zweimal der „sexiest man alive“, von einem Schönheitschirurgen mit einer Face-Mapping-Software untersucht wurde - mit dem Ergebnis, dass das Gesicht des Schauspielers zu 91,68 Prozent mit dem goldenen Schnitt übereinstimme.



*George Clooney*

Wenn man sich anstrengt, kann man das Apple-Logo in eine Konstruktion einbetten, deren Maße vom goldenen Schnitt und den Fibonacci-Zahlen bestimmt werden. Um das zu zeigen braucht es allerdings allerhand geometrische Phantasie, und von dieser Phantasie beflügelt haben Experten aller Art den goldenen Schnitt in vielen Phänomenen unserer Umwelt entdeckt.



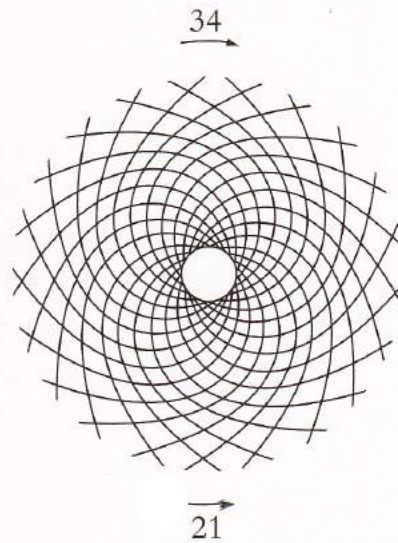
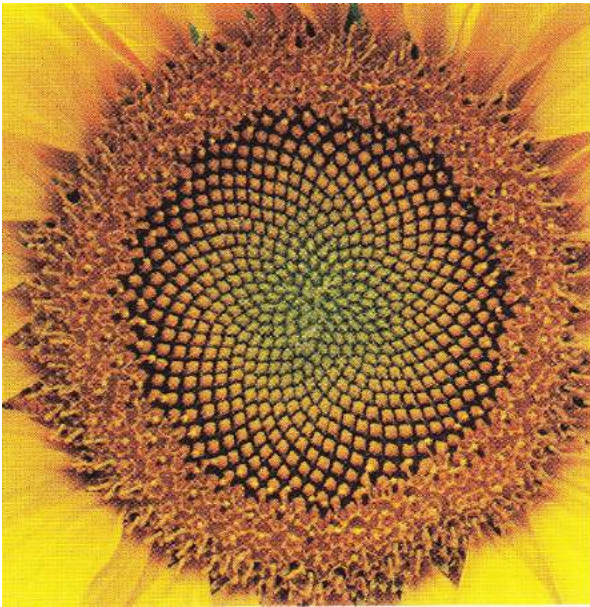
Apple-Logo (Quelle: <https://www.pinterest.de/pin/450008187740508938/>)

In unseren immobilien-boomenden Zeiten nennt G. Matzig, SZ, für den goldenen Schnitt noch eine weitere Bedeutung: der goldene Schnitt nicht als Proportionallehre, sondern als Geschäftsmodell für Makler von Luxusvillen. Aber das ist eine andere Geschichte.

## 1. Natur

Der goldene Schnitt findet sich in vielen pflanzlichen Strukturen. Diese Entsprechung zwischen der abstrakten Zahlenwelt und der physischen Realität ist überraschend und aufregend.

Sie ist z.B. am mit Samen gefüllten Blütenstand einer Sonnenblume zu sehen. Jeder Kern gehört zu genau einer linksdrehenden und zu genau einer rechtsdrehenden Spirallinie. Die Samen bilden gegen und im Uhrzeigersinn Spiralen: 21 und 34. Das sind zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen, auf denen die Struktur der Sonnenblume aufgebaut ist; das Verhältnis der Anzahlen ist die goldene Zahl  $\Phi$ .

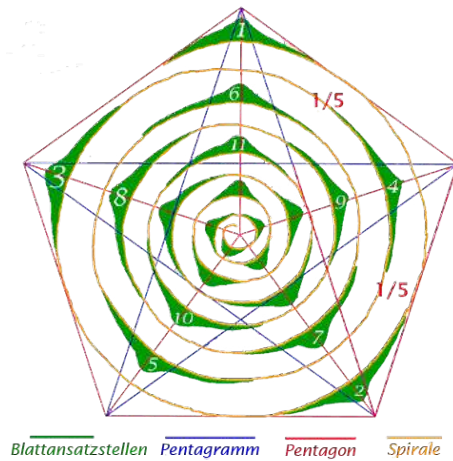
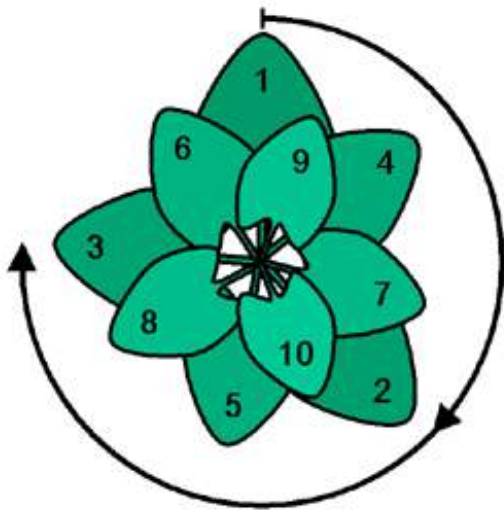


*Sonnenblume (Quelle: Corbalán, Seite 17)*

Andere Blütenstände der Sonnenblume können auch nach einem anderen Paar der Fibonacci-Folge aufgebaut sein, z.B. linksdrehend 34, 55, 89, rechtsdrehend jeweils auch eine Fibonacci-Zahl, und zwar die benachbarte der Folge.

Auch bei der Anordnung der Schuppen bei Tannenzapfen und der Aussenzellen der Ananas treten Fibonacci-Zahlen auf.

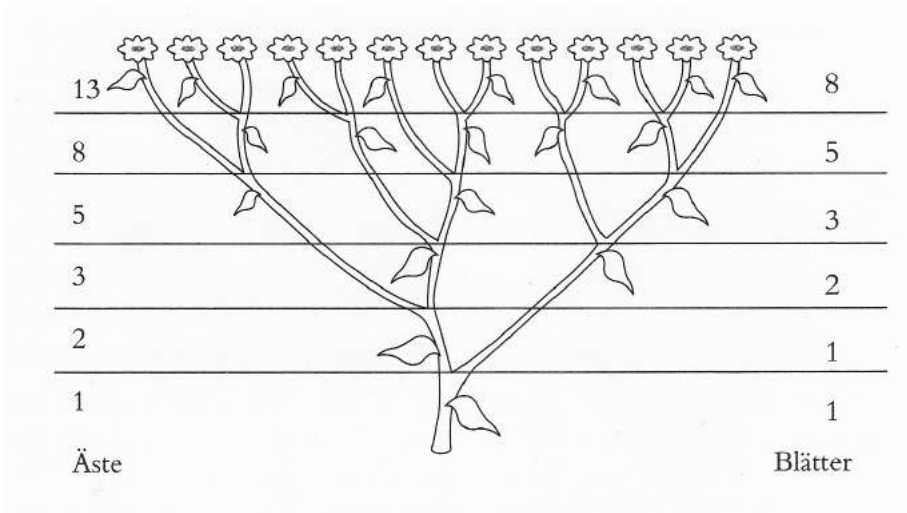
Der goldene Winkel entsteht durch Teilung des Vollwinkels im goldenen Schnitt und beträgt  $137,5^\circ$  ( $\Psi = 2\pi - 2\pi/\Phi$ ). Bei vielen Pflanzen folgen die Blattansätze einer Drehung im goldenen Winkel; weil die goldene Zahl irrational ist, entstehen dadurch nie exakte Überdeckungen, so dass den Blättern die maximal erreichbare Photosynthese ermöglicht wird. Die Blattansatzstellen der Kelch- und Blütenblätter der Rose könnten von einem leidenschaftlichen Anhänger des goldenen Schnitts erfunden worden sein.



Blattstand (Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Phyllotaxis>)

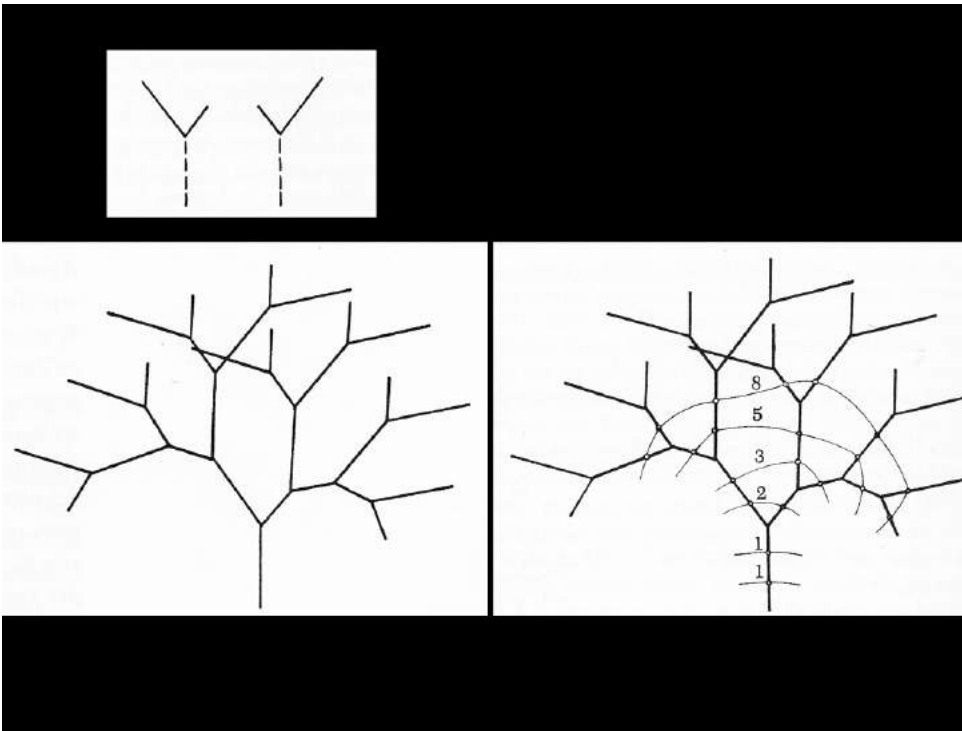
Blattansatzstellen (Quelle: [www.camerabotanica.de/pflanzen/rosa/rosa.html](http://www.camerabotanica.de/pflanzen/rosa/rosa.html))

Auch Äste und Blätter vieler Pflanzen sind nach Fibonacci-Folgen angeordnet, wie hier beim Nießkraut.



Äste und Blätter des Nießkrauts (Quelle: Corbalán, Seite 133)

Solche Verzweigungen kann man auch mit abstrakten Mustern und Fraktalen herstellen, mit der Methode „Wachstum in Wiederholungen“. Nehmen wir als Beispiel zwei Y-Elemente, deren einer Zweig doppelt so lang ist wie der kürzere. An jede Spitze wird eines der beiden Y angefügt. Das führt nach 4 Schritten zu diesem Baum:



(Quelle: Stevens, Seiten 119, 120)

Der Baum wächst aus einer regelmäßigen Kombination eines Bausteins mit seinem Spiegelbild und sieht ziemlich echt aus - weder zu regelmäßig und langweilig, noch zu unregelmäßig und formlos. Teilt man nun die langen Zweige zweimal (in der Annahme, dass sie doppelt so lang zum Wachsen brauchen wie die kurzen), dann verbinden die Konturlinien gleichen Wachstums die Zweige nach der Fibonacci-Reihe.

Auch die Anzahl der Blütenblätter stimmt bei vielen Blumen mit Zahlen der Fibonacci-Folge überein - bei Margeriten je nach Art 21, 34, 55, 89.



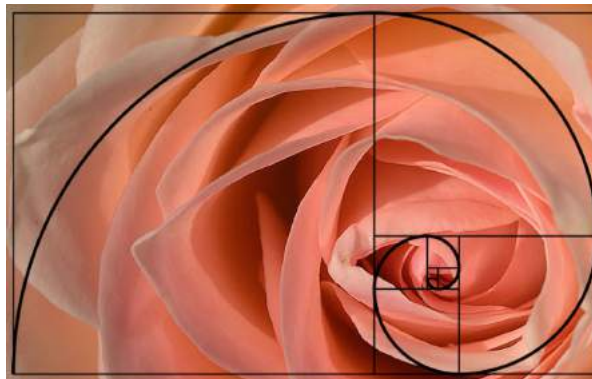
Margerite (Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Magerwiesen-Margerite>)

Der goldene Schnitt erscheint in der Natur auch da, wo Blüten oder Tiere die Form eines Pentagramms haben, etwa bei Akeleien, Heckenrosen oder dem Seestern.



*Akelei (Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Akeleien>)*  
*Seestern (Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Seesterne>)*

Das Gehäuse des Nautilus wächst von innen, durch Bildung von neuen Kammern, die jeweils größer sind als die vorangehende, ihre Proportion aber immer beibehalten. Das entspricht genau der Goldenen Spirale. Genauso sind die Blüten vieler Rosen angeordnet.



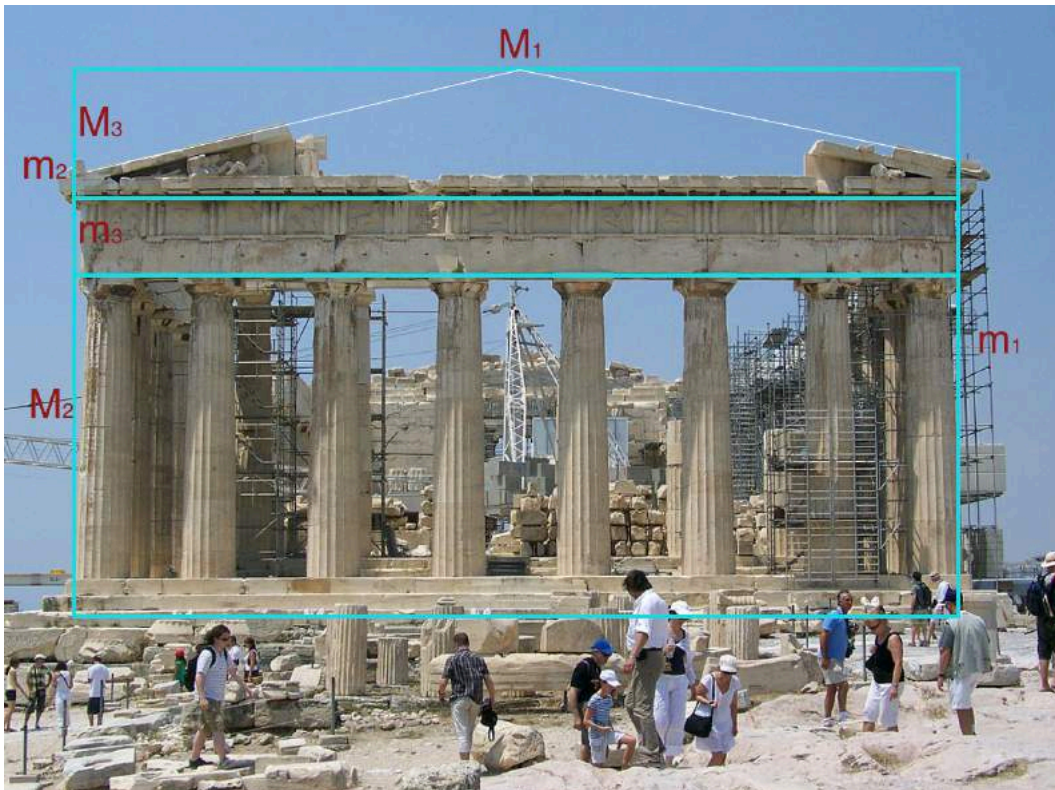
*Nautilus (Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Perlboote>)*  
*Rose (Quelle: <https://seelenliebe.wordpress.com/tag/goldenen-schnitt/>)*



## 2. Architektur

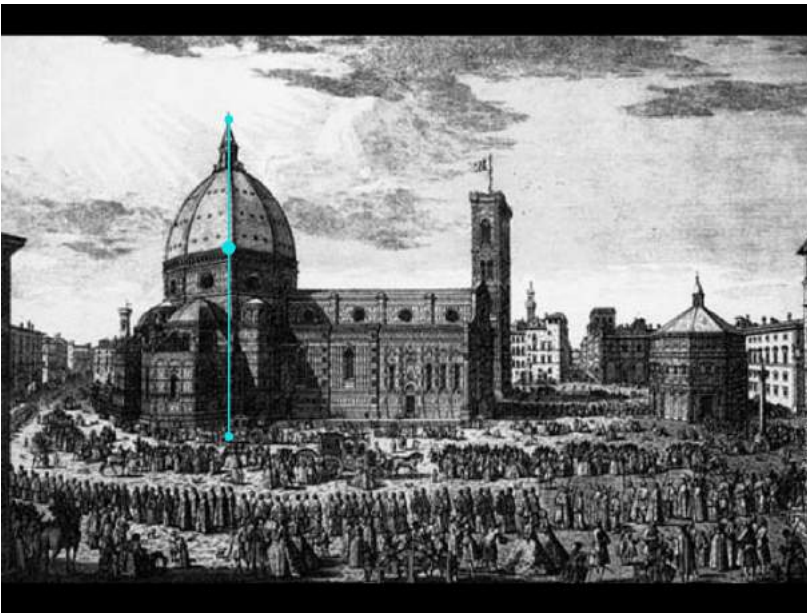
Viele Anzeichen sprechen dafür, dass der goldene Schnitt in der griechischen Architektur eine große Rolle gespielt hat, auch schon vor der systematischen Behandlung durch Euklid.

Ein leuchtendes Beispiel ist der Parthenon, den Perikles 447 - 432 bauen ließ: die Vorderfront passt fast exakt in ein goldenes Rechteck. Auch der Oberbau steht mit dem Unterbau im Verhältnis des goldenen Schnitts.



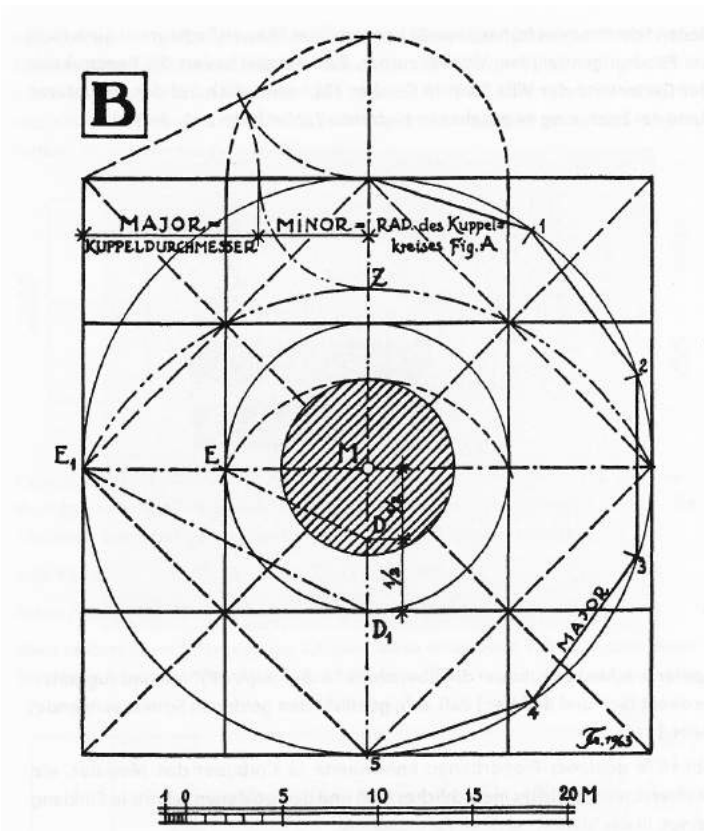
(Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Parthenon>)

Die Maße der Kuppel des Doms von Florenz wurden 1367 als Zeichen des Machtanspruchs der Stadt in Konkurrenz zu z.B. Mailand und Bologna festgelegt; noch 50 Jahre später, ab dem Baubeginn 1420, waren sie für den Baumeister Brunelleschi verbindlich. Die Kuppel, das Hauptwerk Brunelleschis, gilt als technische Meisterleistung der frühen Renaissance. Der Kuppelansatz teilt die Gesamthöhe fast genau im goldenen Schnitt.



(Quelle: [https://de.wikipedia.org/wiki/Kathedrale\\_von\\_Florenz](https://de.wikipedia.org/wiki/Kathedrale_von_Florenz))

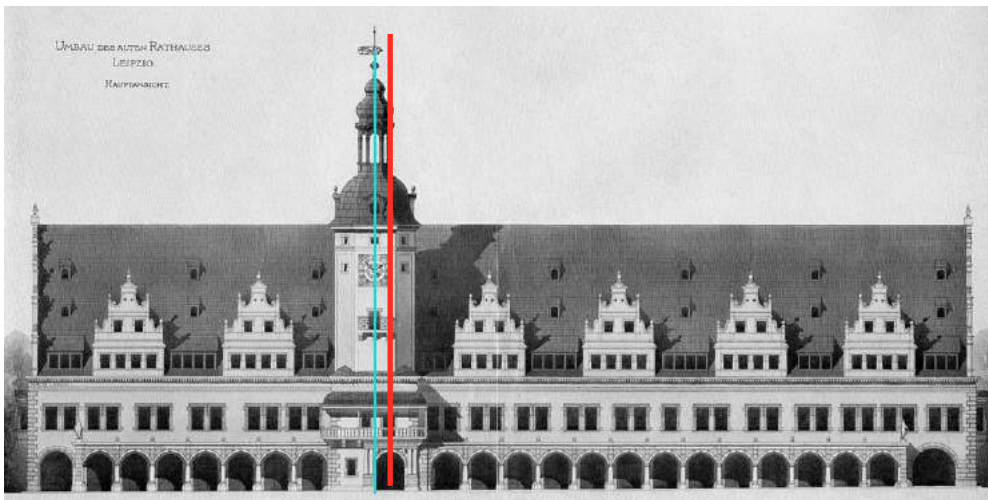
Eine Blütezeit erlebte der goldene Schnitt nach Meinung vieler Autoren in der Architektur der Renaissance, wo er von den Baumeistern vielfach eingesetzt wurde. Ein Beispiel ist der Entwurf Bramantes für die Peterskirche in Rom. Ganz einfach: „Das große Quadrat wird in 16 kleine Quadrate geteilt. Der Radius des Inkreises der mittleren 4 Quadrate wird im goldenen Schnitt geteilt; der Major ist dann der Radius des Kuppelkreises“ (Freckmann).



(Quelle: Beutelspacher, Seite 147)

Allerdings wurde in all diesen Fällen der goldene Schnitt erst post festum gefunden. Es ist keine Äußerung von Architekten, Baumeistern oder Auftraggebern überliefert, die auf eine bewusste Verwendung des goldenen Schnitts hinweist.

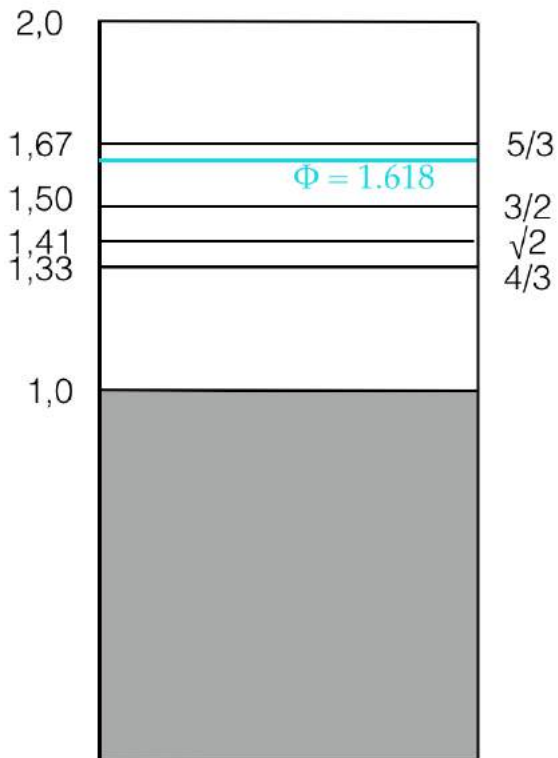
Auch das Leipziger alte Rathaus, eines der bedeutenden Renaissancebauwerke im deutschen Raum, verdankt seinen oft gerühmten goldenen Schnitt dem Zufall. Im 14. Jhd. wurde es erbaut und bereits erweitert, im 16. Jhd. und auch später umgebaut, immer nach Maßgabe des verfügbaren Raums in der Umgebung des Markts, teilweise auf den Fundamenten früherer Bauten. Der goldene Schnitt geht im übrigen nicht durch den Turm, sondern durch die Mitte des Hauptportals.



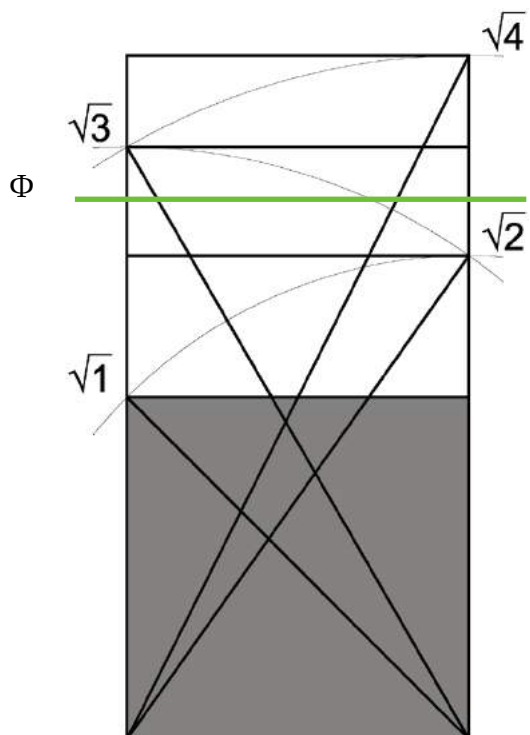
*Altes Rathaus Leipzig (Quelle: [https://de.wikipedia.org/wiki/Altes\\_Rathaus\\_\(Leipzig\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Altes_Rathaus_(Leipzig)))*

Bei Palladio spielt dagegen der goldene Schnitt keine Rolle. Er stellt in seinen „Vier Bücher zur Architektur“ eine Hierarchie der Raumproportionen auf, die direkt auf Platon zurückgeht: es gebe sieben der schönsten und am besten proportionierten Zimmerarten. Ausgehend von Kreis und Quadrat definiert er Rechtecke

- $1 \frac{1}{3} = 4:3 = 1,33$  (Quarte; Quadrat und ein Drittel)
- $\sqrt{2} = 1,41$  (Quadrat und -Diagonale)
- $1 \frac{1}{2} = 3:2 = 1,50$  (Quinte; Quadrat und ein Halbes)
- $1 \frac{2}{3} = 5:3 = 1,67$  (Gr. Sexte; Quadrat und zwei Drittel)



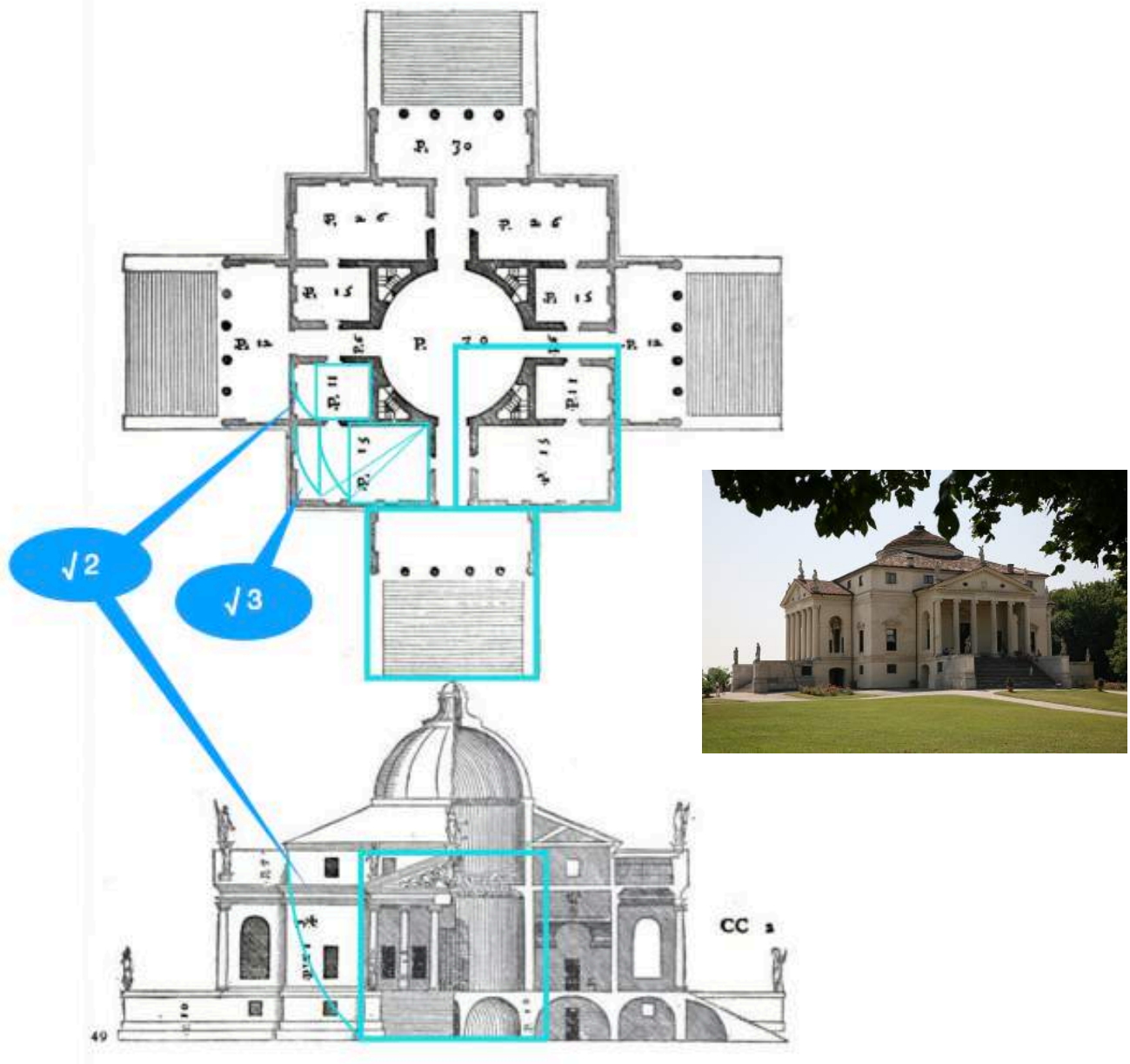
Später definiert er weitere Rechtecke, deren Länge sich aus der Breite mit Hilfe von „Wurzelproportionen“ ergeben.



*Palladios Wurzelproportionen (Quelle: [https://de.wikipedia.org/wiki/Proportion\\_\(Architektur\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Proportion_(Architektur)))*

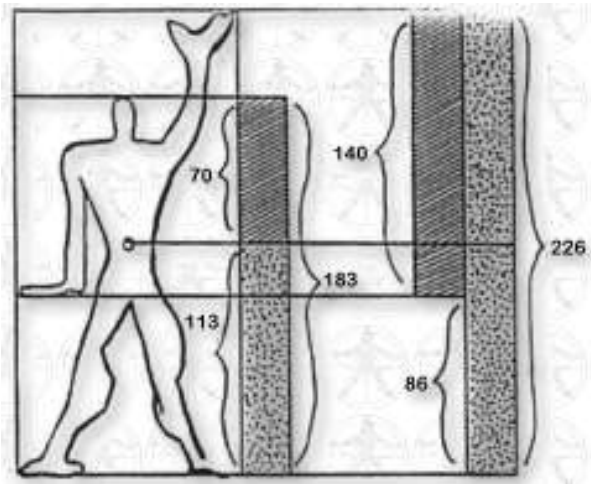
Der goldene Schnitt mit dem Faktor 1.618 kommt dabei nicht vor.

In der Villa Rotonda (1590) bei Vicenza (1565 - 1610) kann man einige dieser Proportionen sehen:



*Palladio, La Rotonda (Quelle: [https://de.wikipedia.org/wiki/La\\_Rotonda](https://de.wikipedia.org/wiki/La_Rotonda))*

Einer der berühmtesten Architekten des 20ten Jhd., Le Corbusier (gebürtiger Schweizer, eingebürgerter Franzose) verwendete dagegen den goldenen Schnitt bewusst in seinen Werken und benennt das auch ganz konkret. Er konstruierte mit Hilfe goldener Proportionen den „Modulor“ als Maßwerkzeug, das menschliches Maß und den goldenen Schnitt in Einklang bringt; dabei ließ er sich von englischen Kriminalromanen inspirieren, in denen die „schönen Männer“ - ein Polizeiwachtmeister zum Beispiel - immer sechs Fuß (1.83 m) groß sind, aber auch an Vetrivs idealen Menschen. Der Name setzt sich zusammen aus *Module* und *or*. Albert Einstein schrieb an Le Corbusier, dass der „Modulor das Schlechte schwer und das Gute einfach macht“.



*Modulor (Quelle: <https://web.archive.org/web/20071013071634/http://library.thinkquest.org/18054/data/text/german/d03.html>)*

Corbusiers Schrift „Der Modulor“ (1949) zählt zu den bedeutendsten Schriften der Architekturtheorie.

Diesen Modulor setzte er zur Konstruktion zahlreicher Bauwerke ein, zum Beispiel im Wohnhaus Unité d’Habitation in Nantes.



*Unité d’Habitation in Nantes (Quelle: [https://de.wikipedia.org/wiki/Le\\_Corbusier](https://de.wikipedia.org/wiki/Le_Corbusier))*

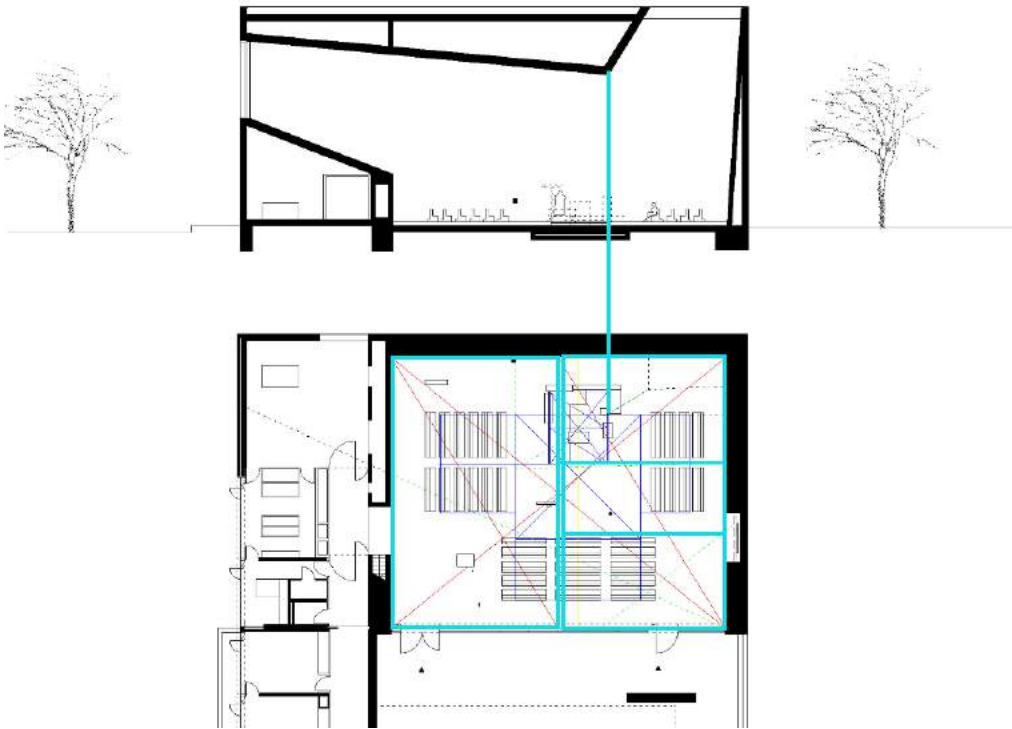
Hier noch ein Detail der Unité d'Habitation in Marseille:



*Unité d'Habitation in Marseille (Quelle: <http://www.architakes.com/wp-content/uploads/2009/07/photo-rightee-flickr-creative-commons-683x1024.jpg>)*

In Berlin musste Le Corbusier auf Grund von Auflagen der Berliner Baubehörde in seiner Unité d'habitation bei den Raumhöhen den Modulor (2.26 m) verlassen und die Berliner Mindestraumhöhen von 2.50 m einhalten. Le Corbusier war so erbost über diesen Bruch mit seinem auf dem goldenen Schnitt aufbauenden Proportionssystem, dass er die Wohnmaschine in Berlin aus seinem Werkverzeichnis strich.

Ein Bauwerk unserer Zeit, bei dem der Architekt, Prof. Andreas Meck, ganz bewusst mit dem goldenen Schnitt gearbeitet hat, ist das Pfarrzentrum St. Nikolaus in Neuried, das 2008 fertiggestellt wurde. Hier nur am Beispiel des Kirchenraums Hinweise auf die Konstruktion: Der Grundriss des Kirchenschiffs ist aus zwei goldenen Rechtecken aufgebaut, innerhalb dieser Rechtecke finden sich weitere Proportionen nach dem goldenen Schnitt, aber auch die Raumhülle mit ihren geneigten Wand- und Deckenflächen ist aus dem goldenen Schnitt entwickelt.



*Grundriss, Aufriß Kirchenschiff St. Nikolaus, Neuried (Quelle: meck architekten)*

Entstanden ist ein höchst eindrucksvoller Raum von warmer und einladender Spiritualität.

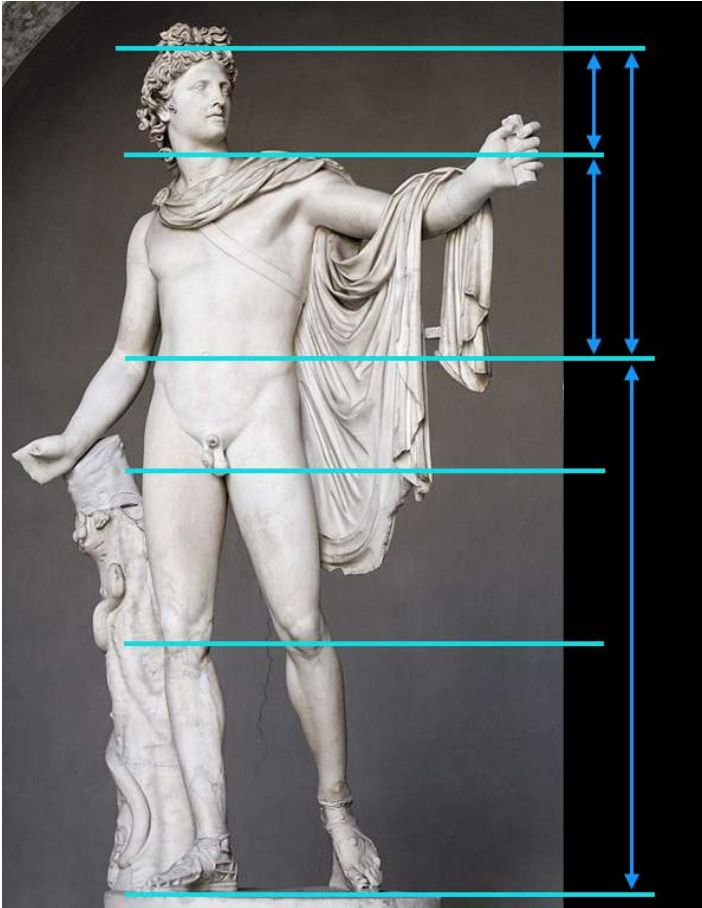


*Kirchenschiff St. Nikolaus, Neuried (Quelle: meck architekten)*



### 3. Bildende Kunst

Die Frage nach der richtigen Proportion ist eine der Grundfragen der Kunst - sowohl für den ausübenden Künstler als auch für den Kunstanalytiker.



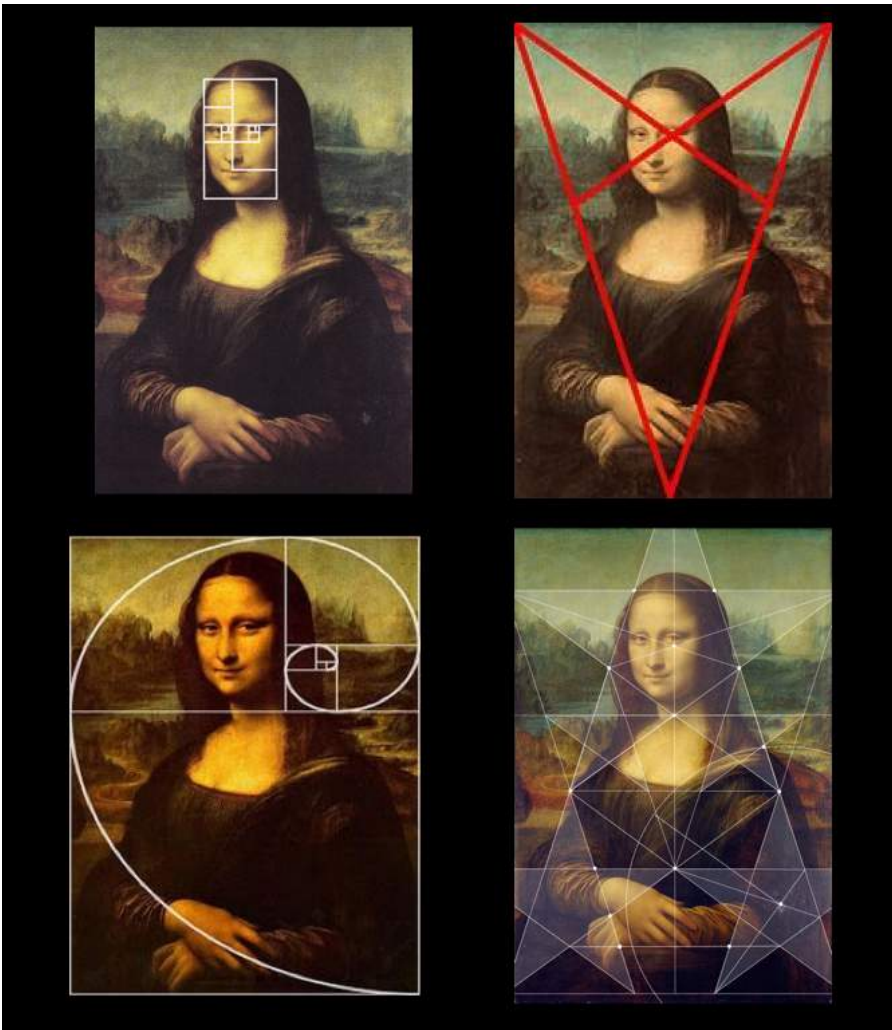
*Apollo von Belvedere*

(Quelle: [https://de.wikipedia.org/wiki/Apollo\\_von\\_Belvedere](https://de.wikipedia.org/wiki/Apollo_von_Belvedere))

Der Apollo von Belvedere ist eine berühmte Marmorstatue und römische Kopie einer griechischen Bronzestatue, die um 350 v.Chr. geschaffen wurde. Sie galt lange als schönste erhaltene Einzelfigur der Antike. Goethe schrieb 1771 in einem Brief an Herder über sie: *Mein ganzes Ich ist erschüttert, das können Sie dencken, Mann, und es fibriert noch viel zu sehr, als daß meine Feder stet zeichnen könnte. Apollo von Belvedere, warum zeigst du dich in deiner Nacktheit, daß wir uns der unsrigen schämen müssen?*

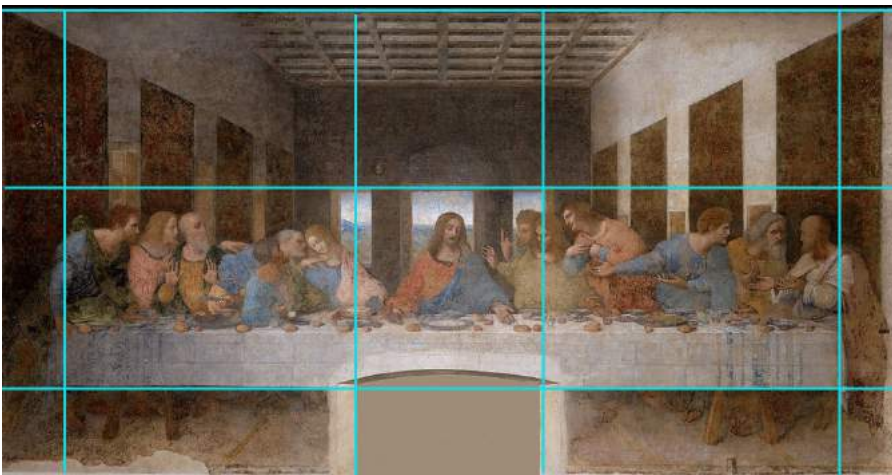
Alle Abmessungen dieser Plastik folgen dem goldenen Schnitt.

Nun zur Malerei: hier einige Beispiele, wie man Elemente des goldenen Schnitts auf die Mona Lisa anwenden kann, um Leonardo auf die goldenen Schliche zu kommen:



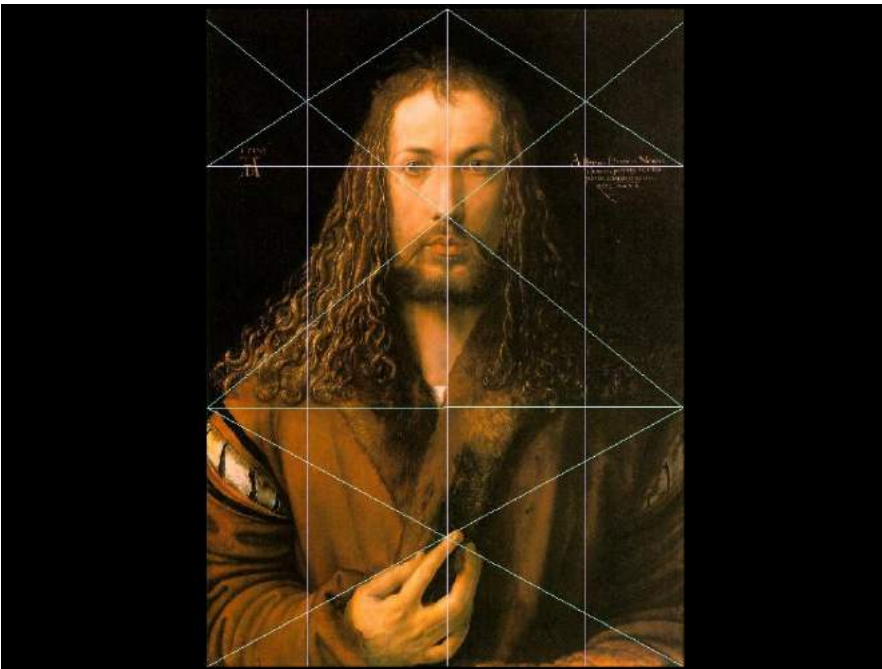
*Leonardo, Mona Lisa (Quelle: Google-Suche „goldener Schnitt Beispiele“)*

Oder auch sein Wandgemälde *Das letzte Abendmahl*, in dem sowohl die Dimensionen der Tafel als auch die Anordnung der Figuren durch goldene Rechtecke definiert sind, obwohl es keinen direkten Beweis gibt, dass Leonardo den goldenen Schnitt gezielt einsetzte:



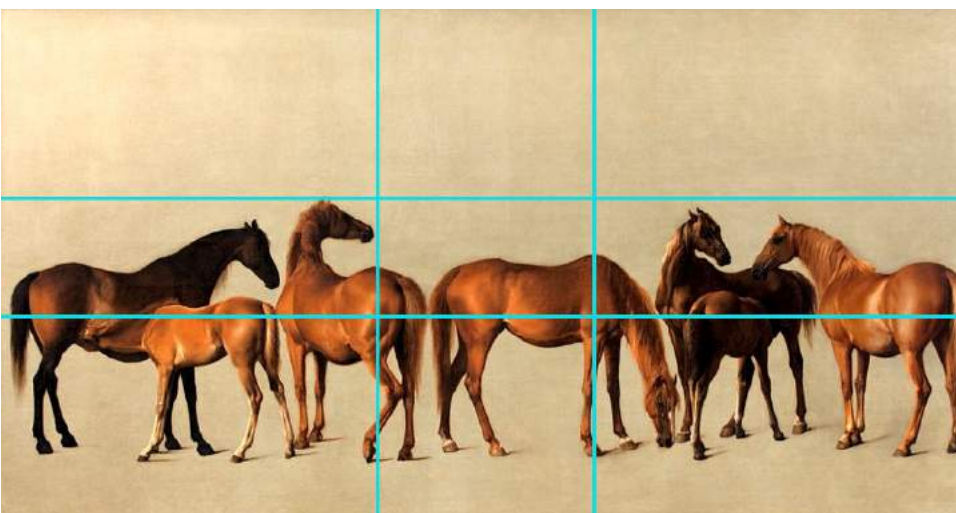
*Leonardo, Das letzte Abendmahl (Quelle: [https://de.wikipedia.org/wiki/Leonardo\\_da\\_Vinci](https://de.wikipedia.org/wiki/Leonardo_da_Vinci))*

Dürer (1471 - 1528) hat in seinen theoretischen Arbeiten den goldenen Schnitt an keiner Stelle erwähnt. Trotzdem ist es nicht ausgeschlossen, dass er in seinen Bildern den goldenen Schnitt verwendet hat. Hier sein Münchner Selbstbildnis von 1500:



*Dürer, Selbstbildnis (Quelle: [https://de.wikipedia.org/wiki/Dürers\\_Selbstbildnisse](https://de.wikipedia.org/wiki/Dürers_Selbstbildnisse))*

Der Neoklassizist George Stubbs (1724 - 1806), malte seine berühmtem Pferdebilder photorealistisch genau. Sein Bild *Mares and Foals* aus dem Jahr 1762 gehorcht, wie der bekannte Kunsthistoriker Werner Busch gezeigt hat, den Gesetzen des goldenen Schnitts: die Ohren der zweiten Stute von links liegen an der oberen Linie des waagrechten goldenen Schnitts, die untere Linie geht durch die Mitte der Pferdeleiber; die beiden senkrechten Linien des goldenen Schnitts markieren den höchsten Punkt des Widerrists von zweiter und dritter Stute von links.



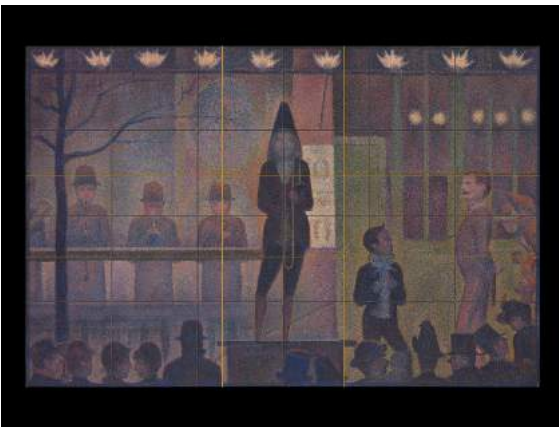
*Stubbs, Mares and Foals, 1762 (Quelle: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:George\\_Stubbs\\_Mares\\_and\\_Foals\\_1762.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:George_Stubbs_Mares_and_Foals_1762.jpg))*

Caspar David Friedrich (1774 - 1840) setzte verschiedene Konstruktionsprinzipien für seine Bildkomposition ein, darunter auch den goldenen Schnitt. Der Tetschener Altar (das Kreuz im Gebirge), eines seiner berühmtesten Bilder, ist konsequent nach den Proportionen des goldenen Schnitts gestaltet (wobei der Kunsthistoriker Werner Busch die obere Waagrechte auf der Kämpferplatte des Rahmens verortet, am Übergang vom irdischen zum himmlischen Bereich).



*Tetschener Altar (Quelle: [https://de.wikipedia.org/wiki/Tetschener\\_Altar](https://de.wikipedia.org/wiki/Tetschener_Altar))*

Georges Seurat (1859 - 1891), ein wesentlicher Vertreter des Pointillismus, wählte oft einen streng geometrischen Bildaufbau. In seinem Bild ‚Le Parade‘ fallen zwei strukturierende Linien auf: die Balustrade etwas unterhalb der Bildmitte und die vertikale Linie rechts 3/4 der Bildmitte. Über die Frage, ob die Struktur des Bildes mit dem goldenen Schnitt zusammenhängt streiten verschiedene Experten trefflich.



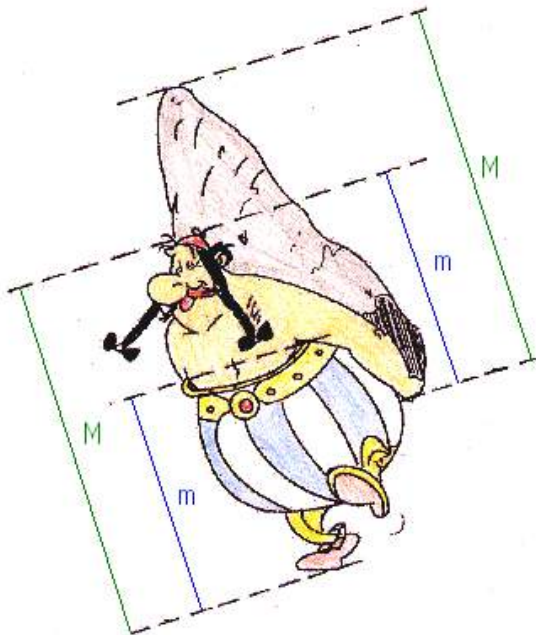
*Seurat, Parade (Quelle: [https://en.wikipedia.org/wiki/Parade\\_de\\_cirque](https://en.wikipedia.org/wiki/Parade_de_cirque))*

1912 veranstaltete eine Gruppe von Kubisten in Paris eine vielbeachtete Ausstellung mit dem Titel „La Section D’Or“. Mit dem Titel der Ausstellung war wohl der goldene Schnitt angesprochen; allerdings ging es keineswegs darum, die Anwendung des goldenen Schnitts bei Kunstwerken voranzutreiben. Hier ein Exponat der Ausstellung: Marcel Duchamp, Nu Descendent un Escalier.



(Quelle: [https://en.wikipedia.org/wiki/Section\\_d%27Or](https://en.wikipedia.org/wiki/Section_d%27Or))

Wie zeitgemäß das Konzept des goldenen Schnitts ist zeigt ein Blick auf Uderzos Obelix.



Obelix (Quelle: <http://www.michael-holzapfel.de/themen/goldenerschnitt/gs-arch-kunst/gs-arch-kunst.htm>)

Der italienische Künstler Mario Merz (1925-2003), ein wesentlicher Vertreter der *Arte Povera*, setzte seit den 1970er-Jahren in vielen seiner Werke die Fibonacci-Folge ein; dabei setzt er die verschiedensten Materialien ein - Neonröhren, Äste, Zeitungspapier. Merz verwendet die Sequenz, um den Fortschritt von Kunst und Gesellschaft zu symbolisieren: jeder Schritt ist die Summe vergangener Ereignisse, so wird die Vergangenheit zu einem integralen und vitalen Bestandteil der Zukunft.



*Mario Merz in einer U-Bahn-Station in Neapel (Quelle: [https://de.wikipedia.org/wiki/Mario\\_Merz](https://de.wikipedia.org/wiki/Mario_Merz))*

## 4. Musik

Wenn die Frequenzen von zwei Tönen im Verhältnis der Fibonacci-Zahlen 8:5 stehen, so bildet sich als Klang eine kleine Sexte. Die Differenz des Verhältnisses  $8:5 = 1,6$  zum goldenen Schnitt  $\Phi = 1,618\dots$  ist so gering, dass nach Meinung von Musikwissenschaftlern der Reiz der kleinen Sexte darauf beruht, dass die Frequenzen der Einzeltöne im goldenen Verhältnis stehen.

Auch in der Komposition wurde verschiedentlich der goldene Schnitt entdeckt, z.B. in Bachschen Fugen, einem Streichquintett von Haydn oder Stücken von Mozart oder Beethoven; diese Entdeckungen sind aber mit großer Vorsicht zu genießen. Dagegen hat Bartok wohl den goldenen Schnitt und Fibonacci-Folgen häufig als Gestaltungsprinzipien eingesetzt, wie der Musikwissenschaftler Ernő Lendvai zeigt. Besonders deutlich wird das in der Sonate für Klavier und Schlagzeug. Sie dauert genau 6432 Achtelnoten lang; der zweite Satz beginnt nach 3975 Achtelnoten -  $6432:3975 = 1,618 = \Phi$ . Aber auch kleine Details sind auf Basis des goldenen Schnitts gestaltet, wie Lendvai an den ersten 17 Takten der Sonate zeigt.

**87 ROOT POSITION**

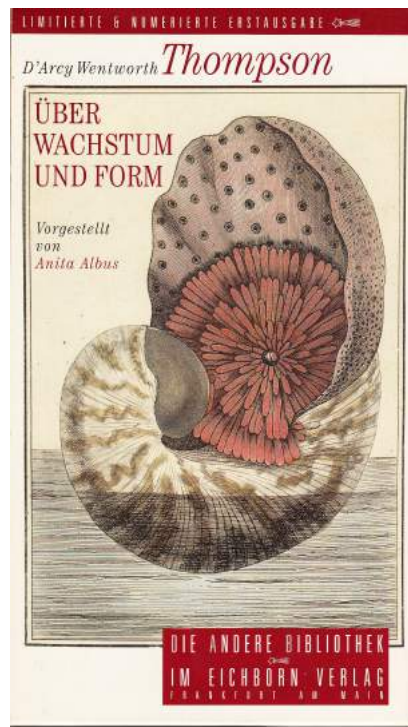
**54 INVERSION**

ROOT POSITION		INVERSION	
Tonic	Cym	Cym	Tam
Positive + Negative	Pos + Negative		
Positive	Negative		
Positive		Negative	
POSITIVE		NEGATIVE	

(Quelle: Beutelspacher, Seite 169)

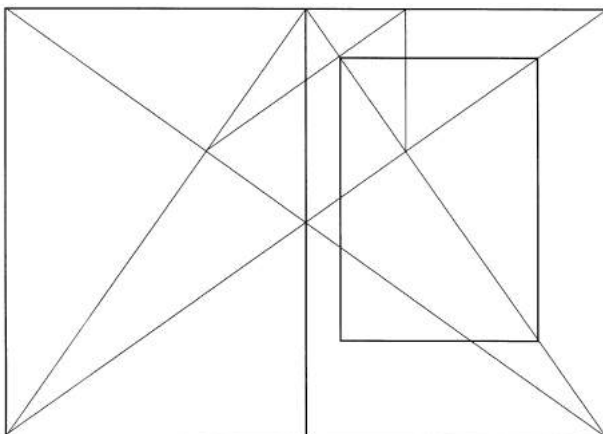
## 5. Buchkunst

Das Bemühen um eine Gestaltung von Büchern, die optimal zum Inhalt und Publikum passen, ist Grundbefindlichkeit aller Buchmensen – was zu einer ungeheuren Vielfalt an Formaten und Ausstattungen führt. Klar, dass dabei auch der goldene Schnitt eine Rolle spielt. Das fängt beim Buchformat an: Buchreihen und Verlagsprogramme sollen eine Einheit bilden. Hier als Beispiele ein Band der Süddeutschen Zeitung Edition mit Format im goldenen Schnitt und ein Band aus der Anderen Bibliothek.



Für die Anordnung des Textes im Innenteil eines Buches („Satzspiegel“) gibt es viele Konstruktionen – ein prominenter Buchgestalter sagt „ich habe nie eine davon angewandt, fand ihr Studium aber lehrreich“.

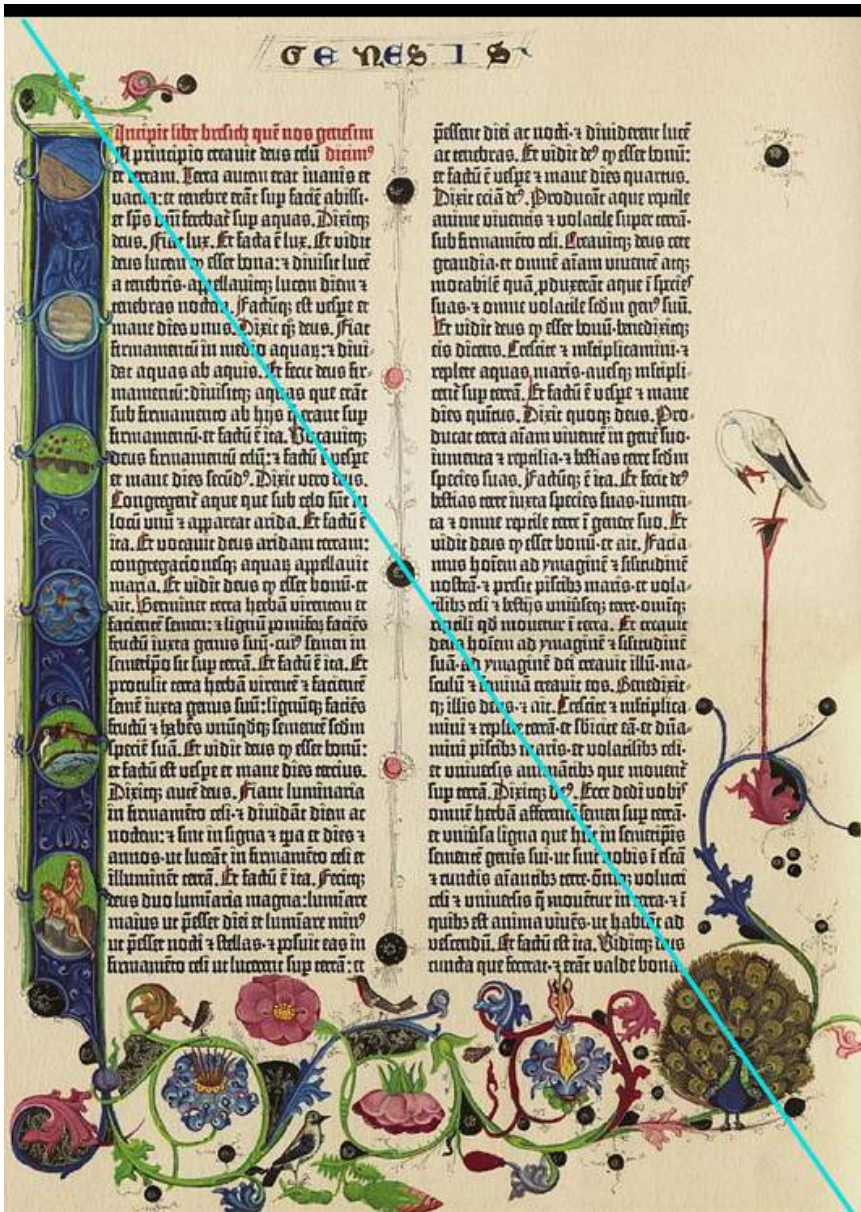
Ein klassisches dieser Schemen liegt seit den spätmittelalterlichen Handschriften vielen Büchern zugrunde und heißt „Villardscher Kanon“, benannt nach dem französischen Dombaumeister Villard (13. Jhd.).



Villardscher Kanon (Quelle: <http://www.typolexikon.de/villardscherteilungskanon/>)



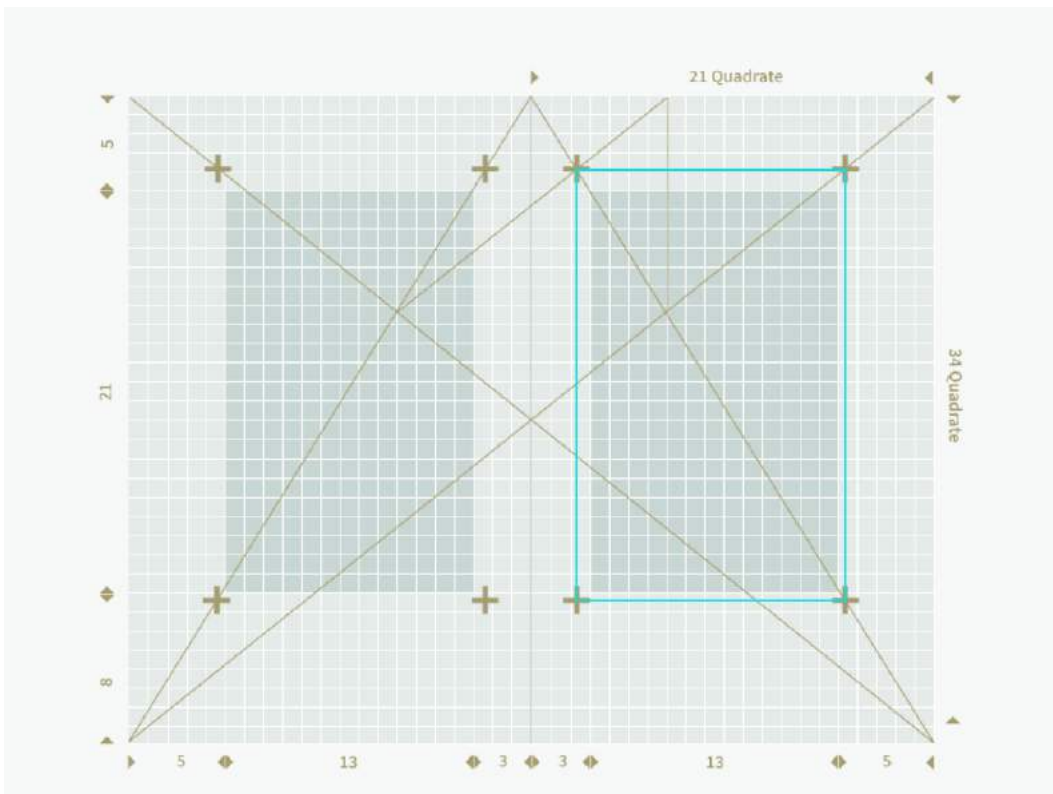
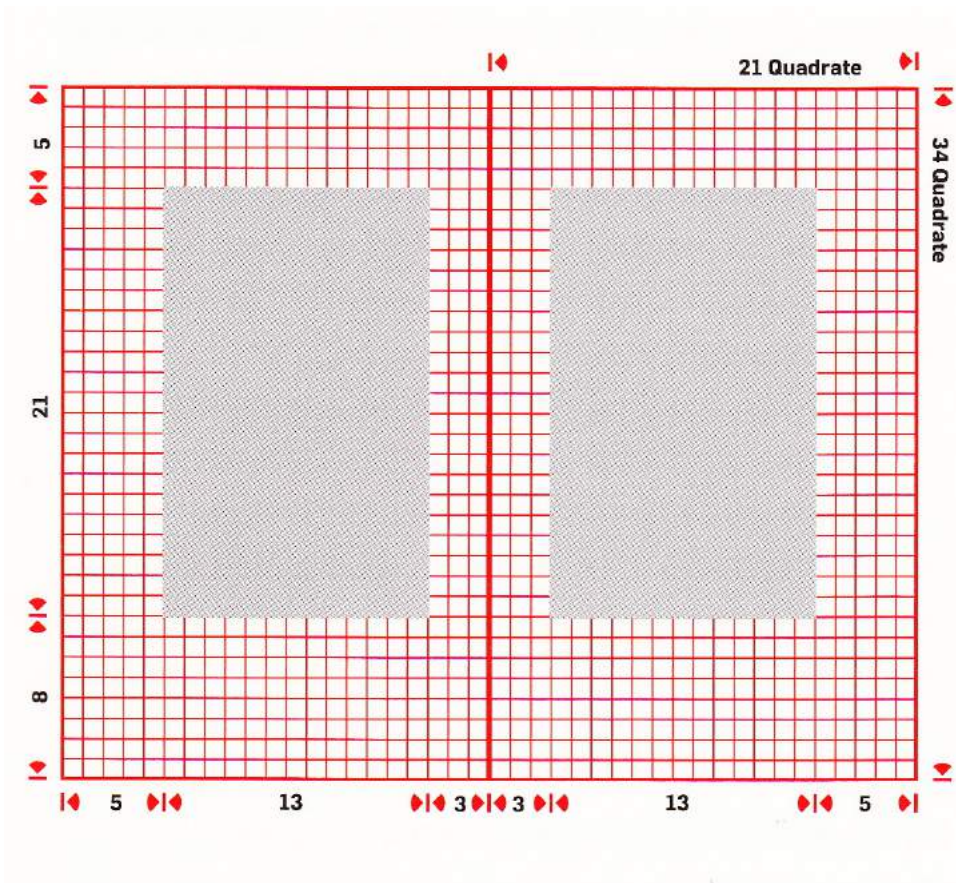
Nach ihm ist auch der Satzspiegel der Gutenberg-Bibel angelegt, der aber keine Proportionen nach dem goldenen Schnitt hat. Das Seitenformat hat die Proportion 1:1,5, wie es bei vielen mittelalterlichen Handschriften üblich war, ist also breiter als ein Format im goldenen Schnitt.



Gutenberg-Bibel (Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Gutenberg-Bibel>)

Nur in einem speziellen Fall, wenn nämlich das Seitenformat den goldenen Schnitt hat, führt der Villardsche Kanon auch zu einem Satzspiegel im goldenen Schnitt.

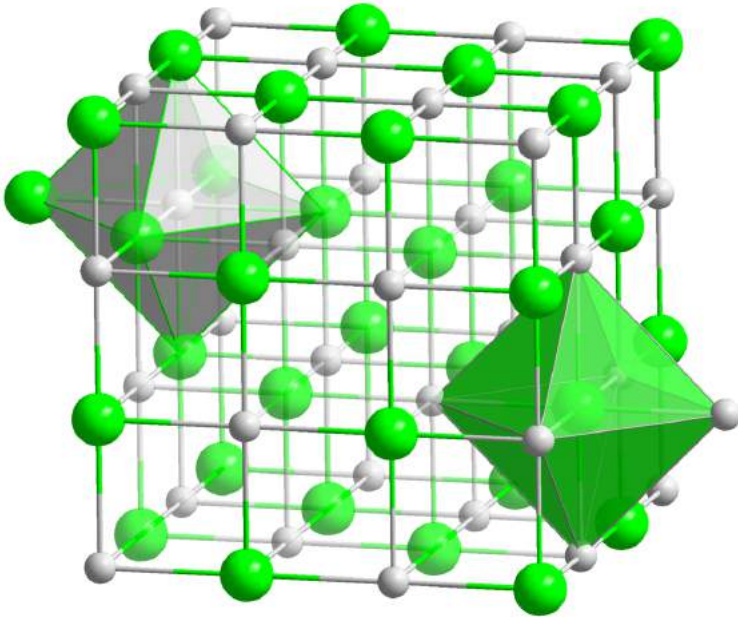
Baut man dagegen die Struktur für Buchformat und Anordnung des Innenteils mit einem Raster aus Fibonacci-Zahlen auf, so sind alle Proportionen, nicht nur die des Satzspiegels, sondern auch die von unterem und oberem sowie von linkem und rechtem Bundsteg im goldenen Schnitt. Der Villardsche Kanon führt bei diesem Buchformat zu einem etwas größeren und anders angeordneten Satzspiegel.



Fibonacci-Seitenaufbau (Quelle: Göttlich, Golden, Genial, Seite 97;  
[www.typolexikon.de](http://www.typolexikon.de))

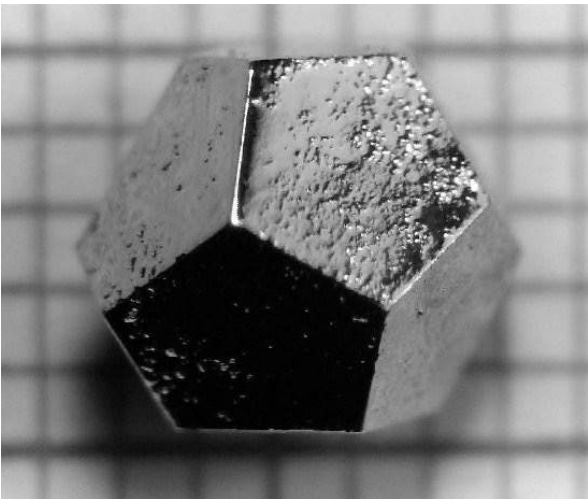
## 6. Kristallographie

In einem normalen Kristall sind die Atome bzw. Moleküle in einer periodischen Struktur angeordnet. Diese Struktur wiederholt sich in jeder der drei Raumrichtungen, ähnlich wie Honigwaben sich in zwei Raumrichtungen wiederholen. Jede Zelle ist von Zellen umgeben, die ein identisches Muster bilden. Zum Beispiel Kochsalz: In jeder Raumrichtung wechseln Natriumatome (grau) regelmäßig mit Chloratomen (grün) ab.



*Kristallgitter von Kochsalz (Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Kristall>)*

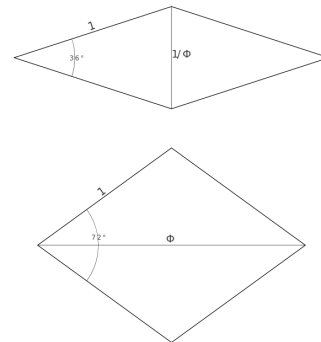
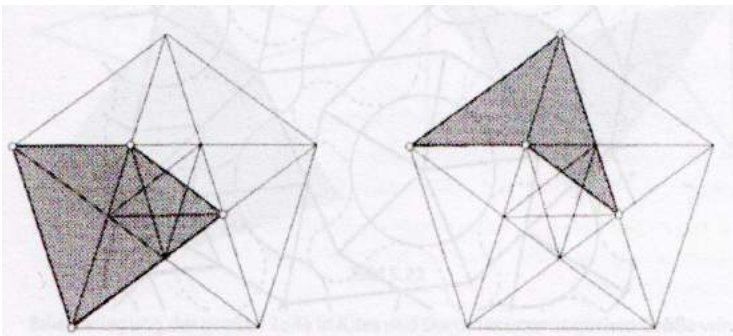
In einem Quasikristall sind die Atome bzw. Moleküle dagegen nur „quasiperiodisch“ angeordnet, in einer geordneten, aber aperiodischen Struktur. Lokal befinden sich die Atome in einer regelmäßigen Struktur, im globalen Maßstab aber ist die Struktur aperiodisch, jede Zelle ist von einem jeweils anderen Muster umgeben. (Quasikristalle kommen in vielen dreidimensionalen Legierungs-Systemen vor. Die meisten Legierungen, die Quasikristalle enthalten, sind thermodynamisch instabil.)



*Ho-Mg-Zn-Quasikristall (Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Quasikristall>)*

Diese 1984 von Dan Shechtman entdeckten Quasikristalle bestehen strukturell aus zwei verschiedenen rhomboedrischen Grundbausteinen, mit denen der Raum lückenlos gefüllt werden kann, ohne dass sich dabei ein Grundschema periodisch wiederholt. „In his pessimistic picture of the year 1984, George Orwell did not anticipate the discovery by Dany Shechtman et al. of another sort of Big Brother monster in the world of crystallography!“ (C. Janot).

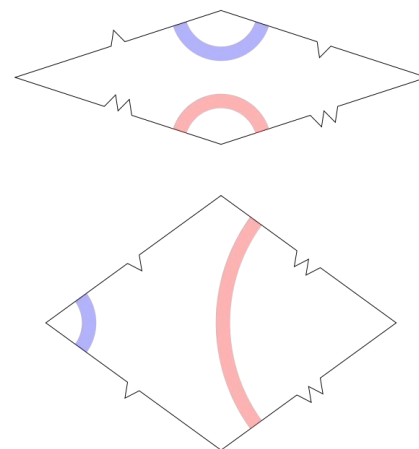
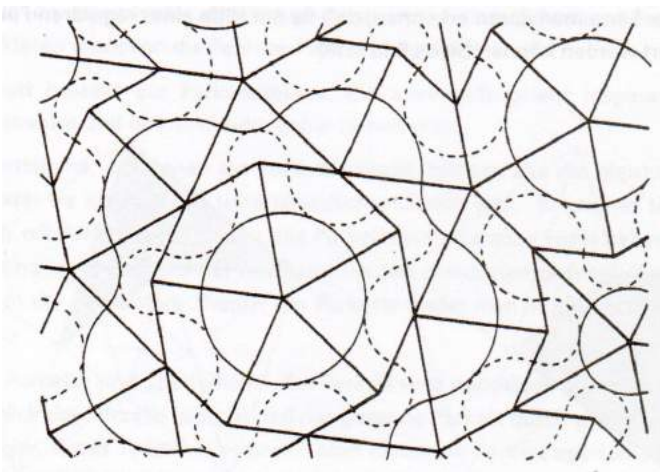
Dieses Phänomen, die lückenlose Füllung von Raum mit einer geordneten, aber aperiodischen Struktur, hat in der Geometrie seit 1973 mit Hilfe des goldenen Schnitts eine Lösung: die „Penrose-Parkettierung“. Am Beispiel des 2-dimensionalen Falls kann man sehen, wie das funktioniert: man verwendet (nur) zwei verschiedene Formen von Parkettsteinen, Drachen und Pfeile (Kites und Darts), die man mit Hilfe eines regulären Fünfecks konstruiert und die deshalb den goldenen Schnitt in vielfältiger Weise aufweisen. (Auch eine Parkettierung mit rhombischen Kacheln, die goldene Proportionen aufweisen, ist möglich).



Drachen und Pfeile (Quelle: Beutelspacher 81)

Rhombische Kacheln (Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Penrose-Parkettierung>)

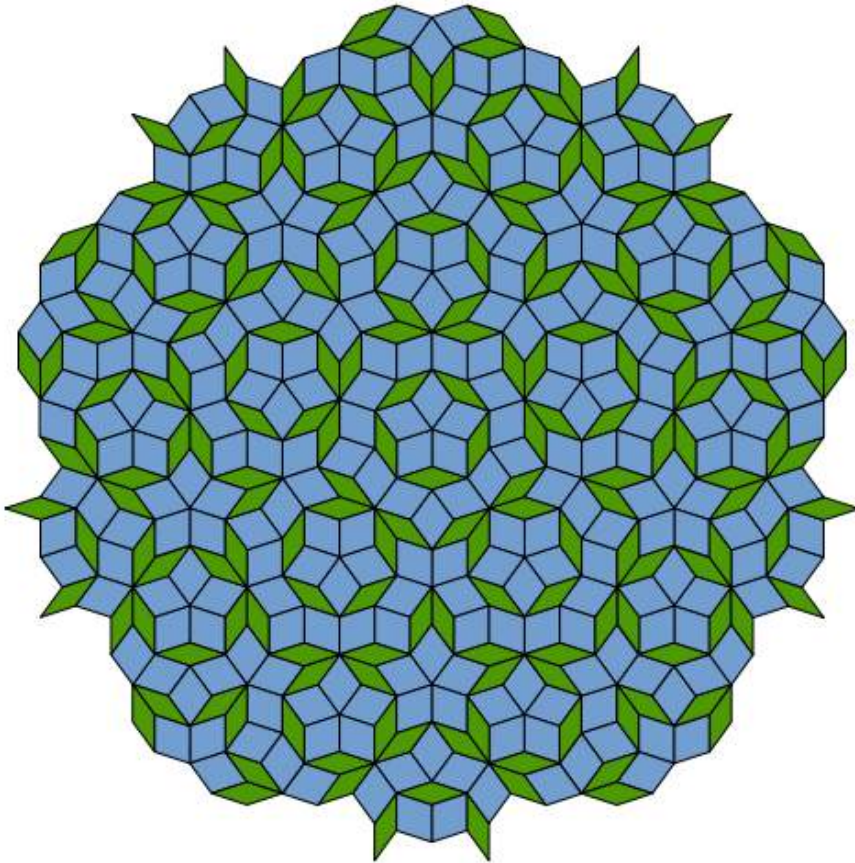
Fügt man diese Drachen und Pfeile so zusammen, wie sie im regulären Fünfeck zu finden sind, dann ergibt sich ein periodisches Parkett. Um ein aperiodisches Parkett zu erhalten, muss eine spezielle Legevorschrift für die Parkettsteine verwendet werden.



Legevorschrift Penrose-Parkett (Quelle: Beutelspacher 82; <https://de.wikipedia.org/wiki/Penrose-Parkettierung>)

Die so gebauten Penrose-Parkette füllen die Fläche lückenlos, sind aperiodisch, besitzen aber dennoch viele lokale Symmetrien, ohne dass sich ein Grundschema periodisch wiederholt.

Nun zurück zur Physik – wenn man einen Quasikristall geeignet schneidet, zeigt die Schnittfläche genau das Muster einer Penrose-Parkettierung:



*Quasikristall/Penrose-Parkettierung*  
(Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Quasikristall>)

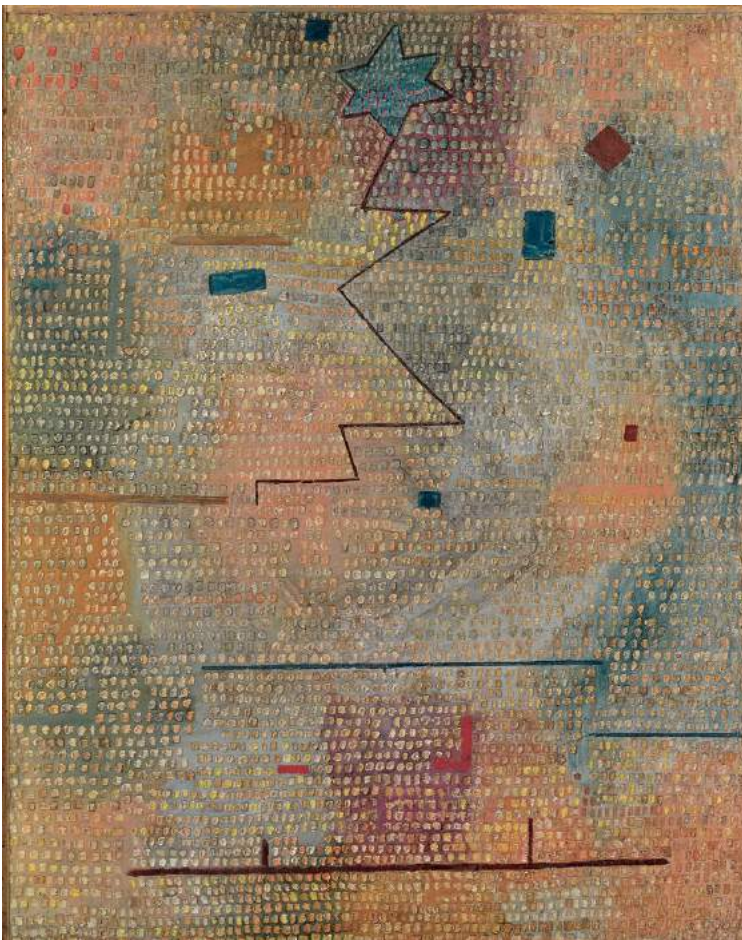
## 7. Warum ist der Goldene Schnitt so schön?

*„Steckt der goldene Schnitt hinter jedem Kunstwerk? Oder kann jedenfalls da, wo der goldene Schnitt ist, Schönheit nicht weit sein?“*

*In sehr vielen Kunstwerken liegt der Punkt des größten Interesses nicht etwa in der Mitte, sondern signifikant zu einer Seite hin verschoben. Man findet hier häufig ein Verhältnis, das zwischen 0,6 und 0,7 liegt (das trifft oft auch für Musikstücke und Theater zu). Ob dieses Verhältnis allerdings für alle Kunstwerke im wesentlichen dasselbe ist, ob es 1,6 oder 3/2,  $\Phi$  oder  $\pi/5$  ist, ob es rational oder irrational ist, das alles scheint uns bei einigermaßen nüchterner Betrachtung nicht ausgemacht zu sein.*

*Was den goldenen Schnitt vielleicht vor den unzähligen anderen Verhältnissen auszeichnet, ist seine unbezweifelbare zentrale Rolle innerhalb der Mathematik.*

*Eine Erfahrung, die wir gemacht haben: Die Suche nach dem goldenen Schnitt in der Kunst ist ein Vergnügen hoher Art - Sie werden nicht nur schöne Kunstwerke betrachten, sondern diese auch in neuem Lichte, vielleicht sogar in neuem Glanze sehen.“ (Beutelspacher)*



*Paul Klee, Aufgehender Stern, 1931 (Quelle: [https://de.wikipedia.org/wiki/Paul\\_Klee](https://de.wikipedia.org/wiki/Paul_Klee))*

## Quellen

### 1. Literatur

Beutelspacher/Petri, Der Goldene Schnitt. 2.A. 1996

Corbalán, Der Goldene Schnitt. 2010/2017

Doczi, Die Kraft der Grenzen.1984

Forssmann, Wie ich Bücher gestalte. 2015

Göttlich Golden Genial. Weltformel Goldener Schnitt? 2016

Hemenway, Der geheime Code. 2008

Janot, Quasicrystals. 2.A. 1994

Müller-Römer, Der Klang der Pyramiden - Wirklichkeit oder Wunschdenken?  
2009

Raulff, Das letzte Jahrhundert der Pferde. 2015

Stevens, Zauber der Formen in der Natur. 1974/1983

D'Arcy Thomson, Über Wachstum und Form. 1961/2006

### 2. Internet

Die jeweils bei den Bildern zitierten Fundstellen